Correction de l'exercice 58 page 272

a. Sur $[-10\,;\,-8]$, la fonction f est continue et strictement croissante ; $f(-10)=-3$, $f(-8)=5$ et $3\in[-3\,;\,5]$. Alors l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution dans $[-10;-8]$
Sur $[-8\,;\,3]$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; $f(-8)=5$, $f(3)=-1$ et $3\in[-1;5]$. Alors l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution dans $[-8\,;\,3]$
Sur $[3\,;\,10]$, le maximum de f est $0<3$ donc l'équation $f(x)=3$ n'admet pas de solution dans $[3\,;\,10]$.
Ainsi, **l'équation $f(x)=3$ admet 2 solutions dans $[-10;10]$.**

On procède de même pour les questions suivantes :

b. **l'équation $f(x)=0$ admet 3 solutions dans $[-10;10]$.**
c. **l'équation $f(x)=-8$ n'admet pas de solution dans $[-10;10]$.**
d. **l'équation $f(x)=-2$ admet 2 solutions dans $[-10;10]$.**

Correction de l'exercice 59 page 272

59 Si $c\in\,]-\infty\,;\,-5[\,\cup\,]5\,;\,+\infty[$, alors l'équation $f(x)=c$ n'admet aucune solution.
Si $c\in[-5\,;\,-3[\,\cup\,\{5\}$, alors l'équation $f(x)=c$ admet une seule solution.
Si $c\in[-3\,;\,-1[\,\cup\,]0\,;\,5[$, alors l'équation $f(x)=c$ admet 2 solutions.
Si $c\in[-1\,;\,0]$, alors l'équation $f(x)=c$ admet 3 solutions.

Correction de l'exercice 60 page 272 (questions b et c)

b. $g(x)=12x^2-5x$.
g est définie et dérivable sur $[0\,;\,10]$. Pour tout x de $[0\,;\,10]$, $g'(x)=24x-5$
On a le tableau suivant :

x	0	5/24	10
$g'(x)=24x-5$			
$g(x)$	0 ↘	-0,5	↗ 1150

L'équation $g(x)=1$ n'a pas de solution dans $[0;5/24]$ car le maximum de g sur cet intervalle est 0

Sur $\left[\frac{5}{24}\,;\,10\right]$, la fonction g est continue et strictement croissante ; $g(5/24)=-0{,}5$, $g(10)=1150$ et $1\in[-0{,}5\,;\,1150]$. Alors **l'équation $g(x)=1$ admet une unique solution dans $\left[\frac{5}{24}\,;\,10\right]$.**

Ainsi l'équation $g(x)=1$ admet une seule solution.

c. $h(x)=7x^3+5$.
h est définie et dérivable sur $[0\,;\,10]$. Pour tout x de $[0\,;\,10]$, $h'(x)=21x^2$
On a le tableau suivant :

x	0		10
$h'(x)=21x^2$		+	
$g(x)$	5	↗	7005

Sur $[0\,;\,10]$, Le minimum de h est $5>-42$. Alors **l'équation $h(x)=-42$ n'admet pas de solution dans $[0;10]$.**

Correction de l'exercice 68 page 272 (questions b et c)

On se ramène à une équation du type $f(x)=$ un nombre pour pouvoir appliquer le corollaire du TVI. Pour cela, on "passe tout du même côté".
$e^x = x+3 \Leftrightarrow e^x - x - 3 = 0$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x-3$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x-1$
$f'(x)$ n'est ni un trinôme ni une fonction affine donc on résout $f'(x)>0$ pour savoir où on met le $+$ dans le tableau. De même, on résout $f'(x)<0$ pour savoir où on met le $-$.
On cherche le signe de $f'(x)$: $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$
De même, $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$
On a alors le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)=21x^2$	$-$		$+$
$g(x)$		-2	

On cherche alors les limites de la fonction f pour pouvoir utiliser le corollaire du TVI :
$f(x)=e^x-x-3$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x-3=+\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
En $+\infty$, on a une FI $(+\infty-\infty)$ donc on factorise :
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{3}{e^x}\right)=e^x\left(2-\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}-\dfrac{3}{e^x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ d'après le cours donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}-\dfrac{3}{e^x}\right)=2$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ par produit.
On peut donc compléter le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)=21x^2$	$-$		$+$
$g(x)$	$+\infty$	-2	$+\infty$

Sur $]-\infty\,;0]$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $f(0)=-2$ et $0\in]-2\,;+\infty[$. Alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]-\infty\,;0]$.
Sur $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante ; $f(0)=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $0\in]-2\,;+\infty[$. Alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.
On peut donc affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
Ainsi, l'équation $e^x=x+3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 100 page 278

f est une fonction continue sur $[0\,;1]$ et, pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x)\in[0\,;1]$ (c'est ce que signifie "dans l'intervalle $[0\,;1]$")
$f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$
Soit g la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $g(x)=f(x)-x$.
g est continue sur $[0;1]$ comme différence de fonctions continues.
$g(0)=f(0)\in[0\,;1]$ donc $\boldsymbol{g(0)\geqslant 0}$
$g(1)=f(1)-1$ et $f(1)\in[0\,;1]$ donc $f(1)-1\leqslant 0$, c'est-à-dire $\boldsymbol{g(1)\leqslant 0}$.
Alors, d'après le TVI, l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$.
Or $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x$.
Ainsi, **l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.**

Correction de l'exercice 55 page 241

$g\circ f(x)$ existe ssi $f(x)$ appartient à l'ensemble de définition de g

ssi $f(x)\in\ ]0\,;+\infty[$ en effet, d'après le tableau de variation de g, g est définie sur $]0\,;+\infty[$.

On utilise le tableau de variation de f pour déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)>0$

$g\circ f(x)$ existe ssi $x\in\ ]-\infty\,;2[\cup]4\,;+\infty[$

Ainsi, l'ensemble de définition de $g\circ f$ est $]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$

Correction de l'exercice 10 page 231

a. Les tangentes semblent être toutes en dessous de la courbe de f.
b. Alors f semble convexe sur $[-4\,;0]$.

Correction de l'exercice 11 page 231

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=-16x^3+12x^2-126x+12$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f''(x)=-48x^2+24x-126$

On cherche le signe de $f''(x)$: $\Delta=-5472<0$ donc le trinôme est toujours du signe de $a=-48<0$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f''(x)<0$ donc **f est concave sur $\mathbb{R}$.**

Correction de l'exercice 12 page 233

On peut construire le tableau suivant :

x	2	3	6
signe de $f'(x)$	$-$	$+$	
variations de f	$\searrow$	$\nearrow$	

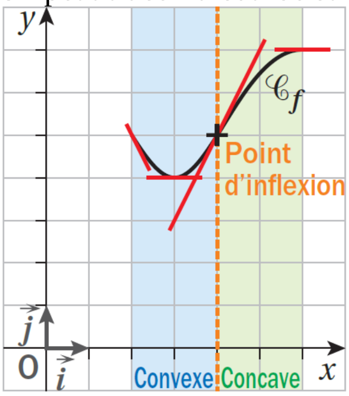
On peut aussi étudier la convexité de f :

f' est croissante sur $[2\,;4]$ donc f est convexe sur $[2\,;4]$.

f' est décroissante sur $[4\,;6]$ donc f est concave sur $[4\,;6]$.

La convexité de f change en 4, donc la courbe de f admet un point d'inflexion (au point d'abscisse 4).

On peut tracer la courbe suivante :



Correction de l'exercice 13 page 233

a. Pour étudier les variations de f, on cherche le signe de $f'(x)$:

$\Delta=\dfrac{81}{4}$ donc le trinôme a deux racines qui sont -1 et 2 et il est du signe de $a=\dfrac{3}{2}>0$ sauf entre ces racines. On a donc le tableau :

x	-2	-1	2	3
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

b. Pour étudier la convexité de f, on étudie le signe de $f''(x)$.

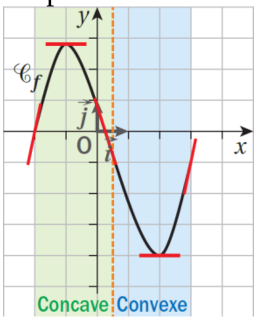
f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f''(x)=3x-\dfrac{3}{2}$

On peut construire le tableau suivant :

x	-2	$1/2$	3
signe de $f''(x)$	$-$	$+$	
convexité de f	**f est concave**	**f est convexe**	

La convexité de f change en 1/2, donc la courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 1/2.

c. On peut construite la courbe suivante :



Correction de l'exercice 106 page 251

1.

a. $\boldsymbol{f(0)=2}$ car le point $A(0\,;2)$ est sur la courbe de f. (l'énoncé parle de tangente à la courbe en A donc A est sur la courbe)

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. Cette tangente est horizontale (information de l'énoncé) donc son coefficient directeur est 0 : $\boldsymbol{f'(1)=0}$**.**

b. La tangente en A à C_f est la droite (AC).

Son coefficient directeur est $m=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{0-2}{-2-0}=1$

Son ordonnée à l'origine est 2 car $A(0\,;2)$ est un point de (AC).

La tangente (AC) à C_f en A a donc pour équation $y=x+2$.

c. ***f* semble convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$.** On regarde les tangentes à la courbe : lorsque la courbe est au-dessus de ses tangentes, la fonction est convexe ; lorsque la courbe est en dessous de ses tangentes, la fonction est concave.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=(2-x)e^x$

a. $f(0)=(2-0)e^0=\boldsymbol{2}$

Pour calculer $f'(1)$, on commence par chercher $f'(x)$ pour tout réle x. On utilise $u\times v$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=-e^x+(2-x)e^x=e^x(-1+2-x)=e^x(1-x)$.

Alors $\boldsymbol{f'(1)=e^1(1-1)=0}$

On retrouve bien les résultats de la question 1.

b. Soit Δ la tangente à D_f au point d'abscisse 0.

Δ a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$f'(0)=e^0(1-0)=1$ et $f(0)=2$ donc Δ a pour équation $y=1(x-0)+2$, c'est-à-dire $\boldsymbol{y=x+2}$**.**

c. $f(x)=(2-x)e^x$.

<u>Limite en $+\infty$:</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$**.**

<u>Limite en $-\infty$:</u>

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2-x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc on a une FI. On transforme donc l'expression :

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=(2-x)e^x=2e^x-xe^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ d'après le cours donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$

d. On a vu (question 2a), que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x(1-x)$. On a donc le tableau :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	1	$+\infty$
$\boldsymbol{e^x}$	+		+
$\boldsymbol{1-x}$	+		$-$
$\boldsymbol{f'(x)}$	+		$-$
$\boldsymbol{f(x)}$	0 ↗	e	↘ $-\infty$

$f(1)=(2-1)e^1=e^1=e$

e. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=(1-x)e^x$.

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f''(x)=-1e^x+(1-x)e^x=\boldsymbol{-xe^x}$

f. On peut alors construire le tableau suivant :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\boldsymbol{e^x}$	+		+
$\boldsymbol{-x}$	+		$-$

$f''(x)$	$+$	$-$
convexité de f	**f convexe**	**f concave**

f est convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$

g. **La courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0** car f'' s'annule et change de signe en 0.

En ce point, la courbe traverse sa tangente.

Correction de l'exercice 56 page 241

a. $f(x)$ est défini si et seulement si et $\dfrac{2x-1}{2x+1} \geqslant 0$.

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x-1}{2x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Ainsi l'ensemble de définition de f est $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

b. Posons $X=\dfrac{2x-1}{2x+1}$.

Limites en l'infini :

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de X sont des F.I. donc on transforme l'expression de X.

Pour réel x différent de 0 et $-0{,}5$: $X=\dfrac{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2-\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\dfrac{1}{x}=2$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} X=1$

De plus, $\lim\limits_{X\to1}\sqrt{X}=\sqrt{1}=1$ donc, par limite de fonction composée, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x}=2$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} X=1$

De plus, $\lim\limits_{X\to1}\sqrt{X}=\sqrt{1}=1$ donc, par limite de fonction composée, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$.

Limite en $-0{,}5^-$:

La fonction étant définie sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$, seule $\lim\limits_{x\to-0{,}5^-} f(x)$ existe.

$\lim\limits_{x\to-0{,}5} 2x-1=-2$ et, d'après le tableau de signes précédent, $\lim\limits_{x\to-0{,}5^-}(2x+1)=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to-0{,}5^-} X=+\infty$

De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc, par limite de fonction composée, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-0{,}5^-} f(x)=+\infty}$.

c. Posons $u(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$.

u est dérivable et strictement positive sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ donc, d'après le cours, f est dérivable sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ avec $f'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

On ne sait pas ici si f est dérivable en $\dfrac{1}{2}$. Les formules de dérivées ne s'appliquent pas en $\dfrac{1}{2}$ mais f peut malgré tout être dérivable en $\dfrac{1}{2}$ (voir exercices supplémentaires sur le plan de travail pour des exemples)

Pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, $u'(x) = \dfrac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x+1)^2} = \dfrac{4}{(2x+1)^2}$

Pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{4}{(2x+1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{(2x+1)^2} \times \sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-1}} > 0}$

d. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$0{,}5$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	‖		‖	$+$	
variations de f	1	↗	$+\infty$ ‖		‖ $\mathbf{0}$	↗	$\mathbf{1}$

$f(0{,}5) = \sqrt{0} = 0$. ce n'est pas une limite ici.

<u>Correction de l'exercice 72 page 243</u>

Exercice à savoir refaire !

1. Il ne faut pas tomber dans le piège ici, c'est bien la courbe de $f\,'$ que l'on nous donne, pas celle de f.

a. Pour avoir les variations de f, il faut regarder le signe de f'. Pour lire graphiquement le signe d'une fonction, on regarde la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses.
Il semble que la courbe de $f\,'$ soit au dessus de l'axe des abscisses donc f' semble positive sur $[-2\,;\,1]$ donc ***f* semble croissante sur $[-2;1]$.**

b. Une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0)+f(0)$. On lit graphiquement $f'(0) = 4$ et l'énoncé nous donne $f(0) = -2$. Une équation de T semble donc être $y = 4(x-0)-2$ ou encore $\boldsymbol{y=4x-2}$**.**

c. $f\,'$ semble croissante sur $[-2\,;\,-0{,}5]$ et décroissante sur $[-0{,}5\,;\,1]$ donc ***f* semble convexe sur $[-2;-0{,}5]$ et concave sur $[-0{,}5;1]$.**

2.

a. Pour tout réel de $[-2\,;\,1]$, $f'(x) = (x^2+x-2)^2 \geqslant 0$, donc ***f* est croissante sur $[-2;1]$.**

b. Une équation de T est $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.
$f'(0) = (0^2+0-2)^2 = 4$ et $f(0) = -2$ d'après l'énoncé donc ***T* a pour équation $\boldsymbol{y=4x-2}$.**

c. f' est dérivable sur $[-2\,;\,1]$ et pour tout x de cet intervalle : $f''(x) = 2\times(2x+1)\times(x^2+2x+1)$
(car $(u^n)' = n\times u'\times u^{n-1}$)
On cherche le signe de x^2+2x+1 : $\Delta = 9$; les racines sont -2 et 1 et le trinôme est du signe de $a = 1 > 0$ sauf entre ces racines.
On a donc le tableau :

x	-2		$-0{,}5$		1
2		$+$		$+$	
$(2x+1)$		$-$	0	$+$	
x^2+2x+1		$-$		$-$	
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	
convexité de f		***f* est convexe**		***f* est concave**	

***f* est convexe sur $[-2;-0{,}5]$ et concave sur $[-0{,}5;1]$.**
Toutes les conjectures sont donc prouvées.
<u>Remarque</u> : le point $A(-0{,}5\,;\,f(-0{,}5))$ est un point d'inflexion.