VARIATIONS DE FONCTIONS
EXERCICES

Exercice 1. bilan sur les lectures de tableau de variations.

Voici le tableau de variation d'une fonction f.

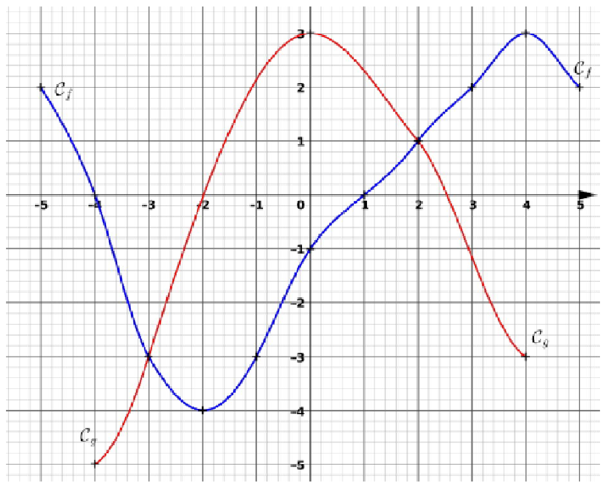
x	-4	-1	2	3	6	8
$f(x)$	5		7		1	
		2		-3		-4

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Quel est le maximum de f sur $[-4\,;8]$?
3. Quel est le maximum de f sur $[3\,;8]$?
4. Quelle est l'image de -1 par f ?
5. Donner par des phrases le sens de variation de f sur $[-4\,;2]$.
6. Comparer, si possible ?
   a. $f(4)$ et $f(5)$.
   b. $f(2{,}1)$ et $f(2{,}3)$.
   c. $f(-3)$ et $f(7)$.
   d. $f(0)$ et $f(2{,}5)$.
7. 4 a-t-il un antécédent entre -1 et 2 ? Justifier.
8. 4 a-t-il un antécédent entre 3 et 6 ? Justifier.
9. Déterminer le nombre d'antécédents de 3 par f. Expliquer.
10. Donner le nombre d'antécédents de 1 par f. Expliquer.
11. On sait de plus que $f(2{,}5)=f(4)=f(7)=0$. Construire le tableau de signes de $f(x)$.

Exercice 2 : bilan sur les lectures graphiques.

On a tracé dans le repère ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g.

1. Donner les ensembles de définitions de f et g.
2. Donner $f(1)$
3. Quel est l'antécédent de -4 par la fonction f ?
4. Quelle est l'image de 4 par la fonction f ?
5. Donner les éventuels antécédents de 0 par f.
6. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=2$.
7. Combien -5 a-t-il d'antécédent par f ?
8. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)>2$.
9. Donner le minimum de f.
10. Donner le maximum de g.
11. Donner le maximum de f.
12. Donner le maximum de f sur $[-5\,;1]$.
13. Déterminer pour quelles valeurs de x, $-3\leqslant f(x)<0$.
14. Citer un intervalle sur lequel f est croissante et négative.
15. Déterminer les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$.
16. Déterminer les solutions de l'inéquation $f(x)>g(x)$.
17. Citer un intervalle sur lequel f et g sont toutes les deux croissantes.
18. Construire le tableau de signes de la fonction f.
19. Construire le tableau de signes de la fonction g.
20. Construire le tableau de variations de la fonction f.
21. Construire le tableau de variations de la fonction g.



Variations de fonctions Exercices

Exercice 3. Dresser le tableau de variation d'une fonction *f* définie sur l'intervalle $[-2\,;5]$ sachant que :

f est croissante sur l'intervalle [–2 ; 0].
f est décroissante sur l'intervalle [0 ; 2].
f est constante sur l'intervalle [2 ; 5].
L'image de 1 par *f* est 3.
– 2 et 5 sont des antécédents de 2.
Le maximum de *f* sur [– 2 ; 5] est 5.

Exercice 4. On donne le tableau de variation d'une fonction *f*.

x	-4		-1		2		3		6		8
$f(x)$	5	↘	2	↗	7	↘	-3	↗	1	↘	-4

1. Donner l'ensemble de définition de *f*.
2. Comparer si possible :
   a. $f(2{,}1)$ et $f(2{,}2)$.
   b. $f(4)$ et $f(5)$.
   c. $f(0)$ et $f(2{,}5)$.
   d. $f(4)$ et $f(0)$.
   e. $f(4)$ et $f(2)$.
   f. $f(4)$ et $f(1{,}999)$.
3. On sait de plus que $f(0) = 3$; l'image de 5 par *f* est 0 ; les antécédents par *f* de 4 sont – 3 et 1 ; l'équation $f(x) = -2$ a pour solutions 4 et 7. Construire une courbe possible pour *f*.

Exercice 5.

f est une fonction définie sur l'intervalle [–3;6] telle que :

- le maximum de *f* sur [–3;6] est égal à 5, il est atteint pour x=0.
- le minimum de *f* sur [–3;6] est égal à –2, il est atteint pour x=3.
- les antécédents de 0 par f sont atteints pour x=0; –3 et 6.
- le maximum de *f* sur [–3;–1] est égal à 3 et il est atteint pour x= – 2.
- $f(-1)$=2 et *f* est croissante sur [–1;0].

Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction *f* dans ce repère.

Exercice 6.

Voici le tableau de variations d'une fonction *f* :

x	-1		0		1		4		7		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	3	↘	0	↘	-4	↗	0	↗	

1. Construire le tableau de signes de $f(x)$.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
3. On sait de plus que l'image de 2 est –1, que les solutions de $f(x) = 2$ sont 0,5 ; – 0,5 et 9 et que le maximum de *f* sur son ensemble de définition est 3, atteint pour $x = 0$. Construire une courbe possible pour la fonction *f*.

Exercice 7.

Une entreprise produit et commercialise du papier. Le coût journalier de fabrication dépend de la quantité produite. La fonction C définie par $C(x) = 5x^2 - 58x + \dfrac{1600}{9}$ donne, pour x tonnes produites, leur coût de fabrication.

L'entreprise ne peut pas fabriquer plus de 15 tonnes de papier par jour.
Chaque tonne de papier est vendue 22€.

1. Calculer les coûts de fabrication, la recette et le bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 10 tonnes de papier par jour.
2. Exprimer en fonction de x la recette $R(x)$ et le bénéfice $B(x)$ pour x tonnes de papier produites et vendues par jour.
3. Déterminer, au kg près, la quantité de papier à produire pour faire un bénéfice maximal.
4. Déterminer, au kg près, la quantité de papier à produire et vendre pour être rentable (c'est-à-dire faire un bénéfice positif).

Correction de l'exercice 1.

1. L'ensemble de définition de f est $[-4\ ;\ 8]$.
2. Le maximum de f sur $[-4\ ;\ 8]$ est 7, atteint pour $x = -4$.
3. Le maximum de f sur $[3\ ;\ 8]$ est 1, atteint pour $x = 6$.
4. L'image de -1 par f est 2.
5. f est décroissante sur $[-4\ ;\ -1]$ et croissante sur $[-1\ ;\ 2]$.
6. Comparer, si possible ?
   - ***e.*** $f(4) < f(5)$.
   - ***f.*** $f(2{,}1) > f(2{,}3)$.
   - ***g.*** $f(-3) > f(7)$ car $f(-3)$ est compris entre 2 et 5 et $f(7)$ est compris entre -4 et 1.
   - ***h.*** $f(0)$ et $f(2{,}5)$: on ne peut pas comparer.
7. 4 a un antécédent entre -1 et 2 car $f(-1) = 2 < 4 < 7$.
8. 4 n'a pas d'antécédent entre 3 et 6 car les nombres compris entre 3 et 6 ont leurs images entre -3 et 1.
9. 3 a 3 antécédents par f : un entre -4 et -1 ; un entre -1 et 2 et un entre 2 et 3.
10. 1 a un seul antécédent par f qui est 6.
11. On peut construire le tableau de signes suivant :

x	-4		$2{,}5$		4		7		8
$f(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	

Correction de l'exercice 2.

1. f est définie sur $\mathbf{[-5;5]}$ et g est définie sur $\mathbf{[-4;4]}$.
2. $f(1) = \mathbf{0}$
3. L'antécédent de -4 par la fonction f est $\mathbf{-2}$.
4. L'image de 4 par la fonction f est $\boldsymbol{f(4)=3}$.
5. Les antécédents de 0 par f sont $-$**4 et 1**.
6. Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont $-$**5 ; 3 et 5**.
7. -5 n'a **pas d'antécédent** par f.
8. $f(x) > 2$ a pour ensemble de solutions $\mathbf{]3;5[}$.
9. Le minimum de f est $-$**4, pour** $\boldsymbol{x=-2}$.
10. Le maximum de g est **3 pour** $\boldsymbol{x=0}$.
11. Le maximum de f est **3 pour** $\boldsymbol{x=4}$.
12. Le maximum de f sur $[-5\ ;\ 1]$ est **2 pour** $\boldsymbol{x=-5}$.
13. $-3 \leqslant f(x) < 0$ lorsque $\boldsymbol{x \in]-4;-3] \cup [-1;1[}$.
14. f est croissante et négative sur l'intervalle $\mathbf{[-2;1[}$.
15. Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont $-$**3 et 2.**
16. L'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est $\mathbf{[-4;-3[\cup]2;4]}$
17. f et g sont toutes les deux croissantes sur $\mathbf{[-2;0]}$.
18. Voici le tableau de signes de la fonction f :

x	-5		-4		1		5
$f(x)$		$+$		$-$		$+$	

19. Voici le tableau de signes de la fonction g :

x	-4		-2		$2{,}5$		4
$g(x)$		$-$		$+$		$-$	

20. Voici le tableau de variations de la fonction f :

x	-5		-2		4		5
$f(x)$	2	↘	-4	↗	3	↘	2

21. Voici le tableau de variations de la fonction g :

x	-4		0		4
$g(x)$	-5	↘	3	↗	-3

Correction de l'exercice 7.

Une entreprise produit et commercialise du papier. Le coût journalier de fabrication dépend de la quantité produite. La fonction C définie par $C(x) = 5x^2 - 58x + \frac{1600}{9}$ donne, pour x tonnes produites, leur coût de fabrication.

Variations de fonctions Exercices
L’entreprise ne peut pas fabriquer plus de 15 tonnes de papier par jour.
Chaque tonne de papier est vendue 22€.

1. Pour $x = 10$:

Les coûts de fabrication sont $C(10) = 5\times10^2 - 58\times10 + \dfrac{1600}{9} = \dfrac{880}{9} \approx 99{,}78$€

La recette est $22\times10 = 220$ €

Le bénéfice est alors $220 - \dfrac{880}{9} = \dfrac{1100}{9} \approx 122{,}22$€

2. Pour x tonnes :
La recette est $R(x) = 22x$
Bénéfice = Recette − Coût
Le bénéfice est alors $B(x) = R(x) - C(x) = 22x - \left(5x^2 - 58x + \dfrac{1600}{9}\right) = \boldsymbol{-5x^2 + 80x + \dfrac{1600}{9}}$.

Pour les questions 3 et 4, on utilise la calculatrice :
On commence par construire un tableau de valeurs de la fonction B avec x entre 0 et 15 (car l'entreprise ne peut pas fabriquer plus de 15 tonnes par jour), avec un pas de 1. On obtient :

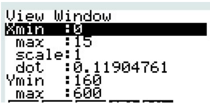
X	Y1
0	177.77
1	252.77
2	317.77
3	372.77

X	Y1
4	417.77
5	452.77
6	477.77
7	492.77

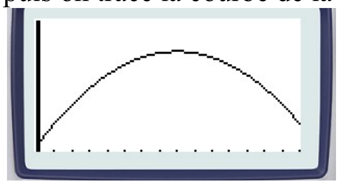
X	Y1
8	497.77
9	492.77
10	477.77
11	452.77

X	Y1
12	417.77
13	372.77
14	317.77
15	252.77

On remarque que les valeurs de $B(x)$ varient entre 177,77 et 497,77.
On règle donc la fenêtre graphique (shift puis F3) en prenant $x_{min} = 0$; $x_{max} = 15$; $y_{min} = 160$ et $y_{max} = 600$:

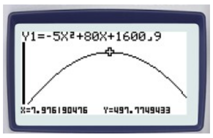


puis on trace la courbe de la fonction B. On obtient :



On utilise la fonction Trace (shift puis F1) pour répondre aux questions suivantes :

3. Le bénéfice maximal semble être 499€77 pour 7,98 tonnes vendues.



4. Le bénéfice semble être toujours positif donc l'entreprise est rentable quelle que soit la quantité vendue.