MÉTHODE POUR ÉTUDIER UNE SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

Pour étudier une suite arithmético-géométrique :
La suite est de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des réels : pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par un nombre a puis on ajoute un nombre b.

Dans un exercice, les étapes seront détaillées, on ne demande pas de connaître la méthode par cœur mais de savoir répondre aux questions qui sont toujours les mêmes.
Ce qui est en gras correspond aux questions et ce qui est en italique est un commentaire des questions (qui sont à peu près toujours les mêmes).

<u>Voici un exemple :</u>

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n-4$.

L'énoncé commence par définir la suite. La suite est bien arithmético-géométrique avec $a = 2$ et $b = -4$.

1. **Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $v_n=u_n-4$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.**

L'énoncé définit une suite (v_n) à partir de la suite (u_n) puis on te demande de prouver qu'elle est géométrique.
Pour montrer qu'une suite (v_n) est géométrique, on calcule v_{n+1} et on montre que c'est un nombre $\times v_n$ (cette méthode est dans le cours)

<u>Solution :</u>

On a $v_n = u_n - 4$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$
De plus, on a $u_{n+1} = 2u_n - 4$ donc $v_{n+1} = 2u_n - 4 - 4$ *On remplace u_{n+1} par sa définition*
donc $v_{n+1} = 2u_n - 8$
Ensuite, on met en facteur le nombre devant u_n (ici 2)
donc $v_{n+1} = 2(u_n - 4)$
On remarque que dans la parenthèse, on retrouve la définition de v_n (si ça ne marche pas, c'est qu'on s'est trompé ou qu'il y a une erreur dans l'énoncé)
donc $v_{n+1} = 2v_n$
On a bien $v_{n+1} =$ un nombre$\times$ v_n donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2.
On cherche alors le premier terme v_0. Pour cela, on utilise la définition de v_n : $v_n = u_n - 4$.
$v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$

2. **Exprimer v_n puis u_n en fonction de n**

on demande une forme explicite pour v_n puis pour u_n. La suite (v_n) étant géométrique, on peut utiliser la formule du cours $v_n = v_0 \times q^n$. Pour u_n, par contre, on ne peut pas car la suite (u_n) n'est pas géométrique. On utilisera donc ce qu'on aura trouvé pour v_n.

<u>Solution :</u>

(v_n) est géométrique de raison 2 avec $v_0 = -3$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = -3\times 2^n$.
Dans l'énoncé, on a $v_n = u_n - 4$.
On isole alors u_n :
Alors $v_n + 4 = u_n$ ou encore $u_n = v_n + 4$.
Et on a trouvé que $v_n = -3\times 2^n$ donc $\boldsymbol{u_n = -3\times 2^n + 4}$
On peut maintenant calculer n'importe quel terme de la suite (u_n).