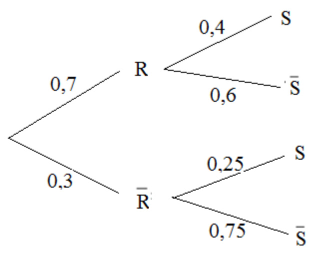
Classe : T S

Pour réviser pour l'oral – Probabilités

Exercice 1

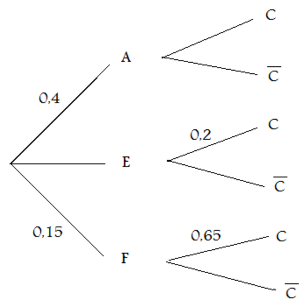
A l'aide des informations situées sur l'arbre ci-dessous, répondre aux questions suivantes.



1. Donner la probabilité de $\bar{R}$.
2. Donner la probabilité de $\bar{S}$ sachant R.
3. Calculer la probabilité de $\bar{R} \cap \bar{S}$.
4. Calculer la probabilité de S.
5. Calculer $P_S(\bar{R})$ et $P_{\bar{S}}(R)$.
6. Les évènements R et S sont-ils indépendants ?
7. Construire et compléter l'arbre inversé où S et $\bar{S}$ sont placés au premier niveau.

Exercice 2

On considère l'arbre de probabilités ci-contre.



1) Exprimer à l'aide des notations probabilistes les valeurs 0,4 puis 0,2 inscrites dans l'arbre.
2) On donne $P(A \cap C) = 0{,}264$. Compléter l'arbre ci-contre.

Exercice 3

Dans la salle des profs, 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme

Exercice 4

Dans une ville comportant 15 000 foyers, une enquête portant sur les habitudes en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 10 500 foyers pratiquent le tri sélectif.
- Parmi les foyers pratiquant le tri sélectif, 30% consomment des produits bio ;
- Parmi les foyers ne pratiquant pas le tri sélectif, 450 consomment des produits bio.

On choisit un foyer au hasard et on note :
T l'évènement : « Le foyer pratique le tri sélectif »
B l'évènement : « Le foyer consomme des produits bio »

1. Déterminer $P(T)$; $P_{\bar{T}}(B)$ et $P_T(B)$.
2. Construire un arbre pondéré illustrant cette situation.
3. Calculer $P(T \cap B)$. Interpréter le résultat.
4. Montrer que la probabilité que le foyer consomme des produits bio est égale à 0,24.
5. Le foyer choisi consomme des produits bio. Calculer la probabilité qu'il ne pratique pas le tri sélectif.
6. Cette ville décide de favoriser les foyers ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle offre chaque année un chèque de 50€ aux foyers qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 20€ aux foyers qui consomment des produits bio (les deux récompenses peuvent être cumulées).
Soit S la variable aléatoire égale à la somme d'argent reçue par un foyer choisi au hasard.
    a. Donner les différentes valeurs que peut prendre S.
    b. Déterminer la loi de probabilité de S.
    c. Calculer l'espérance de S et interpréter ce résultat.

Exercice 5

A la fête foraine, une roue de la fortune est partagée en 12 secteurs égaux : six sont bleus, deux sont roses, trois sont jaunes et un est vert.
Pour lancer la roue, il faut payer 5€.
Si le bleu sort, on a perdu et on ne reçoit rien ; si le jaune sort, on est remboursé du prix de la partie ; si le rose sort, on reçoit 10€ et si le vert sort, on reçoit une somme, notée s, à déterminer.
On note G la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.

1. Donner, en fonction de s, la loi de G.
2. Quelle doit être la valeur de s pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 6

Madame Aldana fait un très grand élevage de chats de races. Elle possède des Siamois, des Birmans et des Abyssins. Le printemps dernier, pratiquement toutes ses femelles ont eu des bébés et Madame Aldana a mis une annonce pour signaler qu'elle avait une très grande quantité de petits chatons à vendre.
On sait que :

- 32 % des chatons sont des Siamois, 54 % des chatons sont des Abyssins et le reste est constitué de Birmans.
- Parmi les Siamois, 54 % sont des mâles.
- 66 % des Abyssins sont des femelles.
- Il y a au total 40,96 % de chatons mâles.

Un petit garçon, Pierre, vient acheter un chaton avec sa mère. Comme ils sont tous adorables et qu'il n'arrive pas à choisir, Pierre décide de le prendre au hasard. On désigne par S, B, A, M et F les évènements suivants :
S : « Pierre achète un chaton Siamois ».
B : « Pierre achète un chaton Birman ».
A : « Pierre achète un chaton Abyssin ».
M : « Pierre achète un chaton mâle ».
F : « Pierre achète un chaton femelle ».

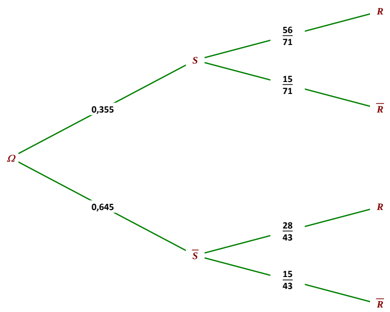
1. Traduire les données de l'énoncé en langage de probabilités (*exemple* : $P(S) = 0,32$)).
2. Construire un arbre illustrant la situation, en indiquant sur chaque branche les probabilités données dans l'énoncé. Les probabilités manquantes seront calculées dans les questions ultérieures.
3. Déterminer la probabilité que Pierre achète un chaton mâle Siamois.
4. Calculer $P(M \cap A)$ et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
5. En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer la probabilité que Pierre achète un chaton mâle Birman.
6. Le chaton acheté par Pierre est un Birman. Quelle est la probabilité que ce soit un mâle ?

Correction

Exercice 1:

1. La probabilité de $\bar{R}$ est $\boldsymbol{P(\bar{R})=0,3}$**.**
2. La probabilité de $\bar{S}$ sachant R est $\boldsymbol{P_R(\bar{S})=0,6}$
3. La probabilité de $\bar{R} \cap \bar{S}$ est
   $P(\bar{R} \cap \bar{S}) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(\bar{S}) = 0,3 \times 0,75 = \mathbf{0,225}$
4. R et $\bar{R}$ forment une partition de Ω donc, d'après la formule des probabilités totales :
   $P(S) = P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S) = P(R) \times P_R(S) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(S) = 0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,25 = 0,355$
   La probabilité de S est 0,355.
5. $P_S(\bar{R}) = \dfrac{P(S \cap \bar{R})}{P(S)} = \dfrac{0,3 \times 0,25}{0,355} = \mathbf{\dfrac{15}{71}}$ et $P_{\bar{S}}(R) = \dfrac{P(\bar{S} \cap R)}{P(\bar{S})} = \dfrac{0,7 \times 0,6}{1-0,355} = \mathbf{\dfrac{28}{43}}$**.**

6. $P_R(S) = 0{,}4$ et $P(S) = 0{,}355$: $P_R(S) \neq P(S)$ donc ***S* et *R* ne sont pas indépendants.**
7. On peut construire l'arbre ci-contre :

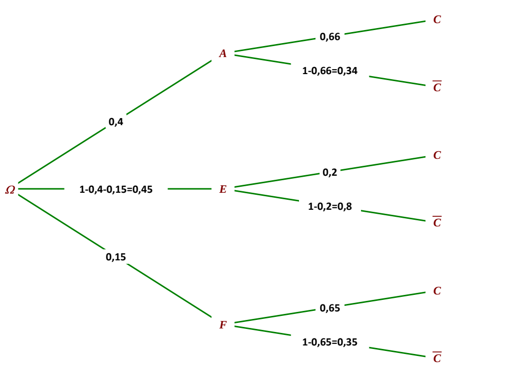


Exercice 2:

1) $0{,}4 = P(A)$ et $0{,}2 = P_E(C)$

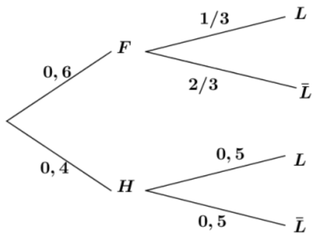
2) $P_A(C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = \dfrac{0{,}264}{0{,}4} = 0{,}66$.

On peut alors compléter l'arbre :



Exercice 3

Notons les différents événements : F: «être une femme», L: «porter des lunettes», H: «être un homme». Alors on a $P(F) = 0{,}6$; $P_F(L) = \dfrac{1}{3}$; il s'agit de la probabilité conditionnelle probabilité de «porter des lunettes» sachant que la personne est une femme. De même, on a $P_H(L) = 0{,}5$. On cherche la probabilité conditionnelle $P_L(F) = \dfrac{P(F \cap L)}{P(L)}$



On peut construire l'arbre ci-contre :

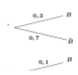
$P(F \cap L) = P(F) \times P_F(L) = 0{,}6 \times \dfrac{1}{3} = 0{,}2$

D'après la formule des probas totales, $P(L) = P(F) \times P_F(L) + P(H) \times P_H(L) = 0{,}6 \times \dfrac{1}{3} + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}4$

Alors $P_L(F) = \dfrac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$: **la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme est 0,5.**

Exercice 4

1. $P(T) = \dfrac{10500}{15000} = 0{,}7$; $P_{\bar{T}}(B) = 0{,}3$ et $P_T(B) = \dfrac{450}{15000 - 10500} = 0{,}1$
2. On peut construire l'arbre ci-contre :
3. $P(T \cap B) = P(T) \times P_T(B) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$. **La probabilité que le foyer choisi pratique le tri sélectif et consomme des produits bio est 0,21.**
4. T et $\bar{T}$ forment une partition de Ω. D'après la formule des probabilités totales,



$P(B) = P(T \cap B) + P\left(\bar{T} \cap B\right) = 0{,}21 + P\left(\bar{T}\right) \times P_{\bar{T}}(B)$

$P(B) = 0{,}21 + 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}24$

Ainsi, la probabilité que le foyer consomme des produits bio est égale à 0,24.

5. $P_B(\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{T}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}3\times 0{,}1}{0{,}24} = 0{,}125$. **La probabilité qu'un foyer consommant des produits bio ne pratique pas le tri sélectif est 0,125.**

6.

a. ***S*** **peut prendre les valeurs 0 ; 20 ; 50 et 70.**

b. $P(S=0) = P(\overline{T}\cap\overline{B}) = 0{,}3\times 0{,}9 = 0{,}27$.

$P(S=20) = P(\overline{T}\cap B) = 0{,}3\times 0{,}1 = 0{,}03$.

$P(S=50) = P(T\cap\overline{B}) = 0{,}7\times 0{,}7 = 0{,}49$.

$P(S=70) = P(T\cap B) = 0{,}7\times 0{,}3 = 0{,}21$.

On a donc la loi de probabilité de S :

$\boldsymbol{x_i}$	0	20	50	70
$\boldsymbol{P(S=x_i)}$	0,27	0,03	0,49	0,21

c. $E(S) = 0{,}27\times 0 + 0{,}03\times 20 + 0{,}49\times 50 + 0{,}21\times 70 = 39{,}8$.

Sur un grand nombre de foyers, chaque foyer recevra en moyenne 39€80.

Exercice 5

1. G peut prendre les valeurs -5 ; 0 ; 5 et $s-5$.

La loi de G est donnée par le tableau ci-dessous :

$\boldsymbol{x_i}$	-5	0	5	$s-5$
$\boldsymbol{P(G=x_i)}$	$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

2. On cherche s tel que $E(G)=0$.

$$E(G) = \frac{1}{2}\times(-5) + \frac{1}{6}\times 0 + \frac{1}{4}\times 5 + \frac{1}{12}\times(s-5) = -\frac{5}{3} + \frac{1}{12}s$$

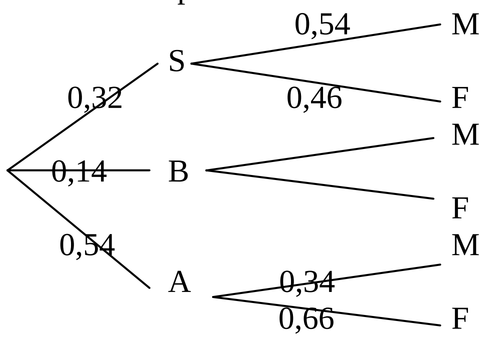
$$E(G) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} + \frac{1}{12}s = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{12}s = \frac{5}{3} \Leftrightarrow s = 20.$$

Pour que le jeu soit équitable, la valeur de *s* doit être 20€.

Exercice 6

1. $\boldsymbol{P(S)=0{,}32}$ **;** $\boldsymbol{P(A)=0{,}54}$ **;** $\boldsymbol{P_S(M)=0{,}54}$ **;** $\boldsymbol{P_A(F)=0{,}66}$ **et** $\boldsymbol{P(M)=0{,}4096}$**.**

2. On peut construire l'arbre :



3. $P(M\cap S) = P(S)\times P_S(M) = 0{,}32\times 0{,}54 = 0{,}1728$.

La probabilité que Pierre achète un chaton mâle Siamois est 0,1728.

4. $\boldsymbol{P(M\cap A)} = 0{,}54\times 0{,}34 = 0{,}1836$. **La probabilité que Pierre achète un chaton mâle Abyssin est 0,0476.**

5. $P(M) = P(M\cap S) + P(M\cap A) + P(M\cap B) \Leftrightarrow 0{,}4096 = 0{,}1728 + 0{,}1836 + P(M\cap B)$

$\Leftrightarrow P(M\cap B) = 0{,}0532$

La probabilité que Pierre achète un chaton mâle Birman est égale à 0,0532.

6. $P_B(M) = \dfrac{P(B\cap M)}{P(B)} = \dfrac{0{,}0532}{1-0{,}54-0{,}32} = 0{,}38$.

La probabilité que le chaton birman acheté par Pierre soit un mâle est 0,38.