LOIS NORMALES. EXERCICES.

Exercice 1 :

La chaîne de production d'un laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

a. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.

b. Déterminer l'entier positif h tel que $P(900-h \leqslant X \leqslant 900+h) \approx 0{,}99$ à 10^{-3} près.

2. La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise.
Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.
Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

Exercice 2 :

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours. On sait que $P(J \leqslant 385) = 0{,}975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

Exercice 3 : Amérique du nord juin 2017

Dans tout l'exercice, les valeurs seront, si nécessaire, approchées au millième.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans le cadre de son activité, une entreprise reçoit régulièrement des demandes de devis. Les montants de ces devis sont calculés par son secrétariat. Une étude statistique sur l'année écoulée conduit à modéliser le montant des devis par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance μ=2900 euros et d'écart-type $\sigma = 1250$ euros.

1. Si on choisit au hasard une demande de devis reçue par l'entreprise, quelle est la probabilité que le montant du devis soit supérieur à 4000 euros ?

2. Afin d'améliorer la rentabilité de son activité, l'entrepreneur décide de ne pas donner suite à 10% des demandes. Il écarte celles dont le montant de devis est le moins élevé.
Quel doit être le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte? Donner ce montant à l'euro près.

Partie B

Ce même entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam, Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé « dossier spam». Le fabricant affirme que 95% des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60% des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel,
il constate que 58,6% des messages sont déplacés dans le dossier spam. Pour un message pris au
hasard, on considère les événements suivants : D : « le message est déplacé » et
S : « le message est un spam ».

1. Calculer $P(S \cap D)$.

2. On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à 0,04.

3. On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?

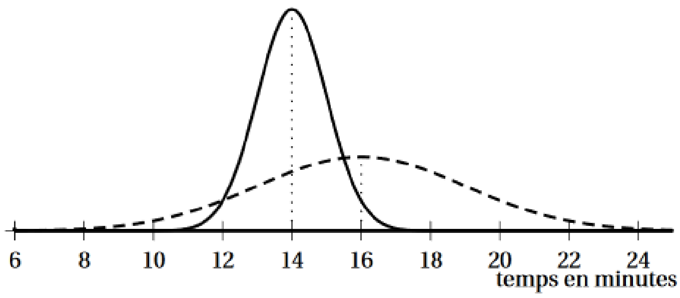
4. Pour le logiciel choisi par l'entreprise, le fabricant estime que 2,7% des messages déplacés vers le dossier spam sont des messages fiables. Afin de tester l'efficacité du logiciel, le secrétariat prend la peine de compter le nombre de messages fiables parmi les messages déplacés. Il trouve 13 messages fiables parmi les 231 messages déplacés pendant une semaine. Ces résultats remettent-ils en cause l'affirmation du fabricant ?

Exercice 4 : Antilles Guyane septembre 2017

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire T_V suivant une loi normale d'espérance μ_V et d'écart-type 1 minute.

Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T_C suivant une loi normale d'espérance μ_C et d'écart-type 3 minutes.

On nomme $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_V$ les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires T_V et T_C représentées dans la figure ci-contre.



1. Déterminer graphiquement, en justifiant votre réponse, μ_V et μ_C.
2. Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes. Arrondir la réponse à 10^{-4}.
3. Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail?

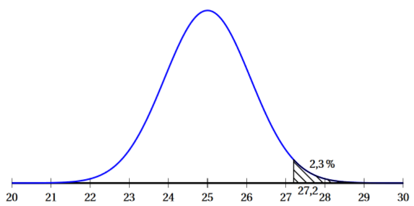
Exercice 5 : Antilles Guyane juin 2017

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1.

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre 22,8 µm et 27,2 µm.

La fonction de densité de probabilité de X est représentée ci-contre. On a pu déterminer que $P(X > 27{,}2) = 0{,}023$.



1.
   - ***a.*** Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.
   - ***b.*** Justifier que 1,1 est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.
   - ***c.*** Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 μm. Arrondir à 10^{-3}.
2. Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98% de pièces conformes.
   La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ μm et d'écart-type σ_2.
   - ***a.*** En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2.
   - ***b.*** Un contrôle qualité évalue le nouveau procédé; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 ne sont pas conformes. Au seuil de 95%, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs?

Exercice 6 :

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à LED. On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7{,}3$.

1. Calculer $P(X > 445)$, la probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an.
2. Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes. Quelle doit-être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95%?

Exercice 7 :

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville. Dans tout l'exercice, les probabilités seront données avec une précision de 10^{-4}.

Les parties A, B, *et* C *sont indépendantes*

Partie A. Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Le tableau suivant présente les observations faites sur une journée.

Durée d'attente en minute	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.

2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en minute).

a. Justifier que l'on peut choisir λ=0,5 min.

b. Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?

c. Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle attende encore plus d'une minute ?

Partie B. Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

Une fois garée, la durée de stationnement d'une voiture est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ min et d'écart-type $\sigma = 30$ min.

1.

b. Quelle est la durée moyenne de stationnement d'une voiture?

c. Un automobiliste est garé dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ?

d. À la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99% des voitures ?

2. La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

Déterminer le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

Partie C. Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75% des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.

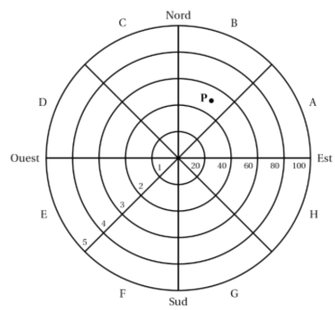
Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95% des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint ?

Exercice 8 :

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur.

L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, est représenté ci-contre.



Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentriques correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 8 0et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur.

De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H.
L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple, le point P positionné sur la figure est situé dans le secteur $B3$.
On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ de la manière suivante :
• l'origine O marque la position du capteur;
• l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est ;
• l'axe des ordonnées est orienté du Sud au Nord ;
• l'unité choisie est le kilomètre.
Dans la suite, un point de l'écran radar est associé à un point d'affixe z.

Partie A

1. On note z_P l'affixe du point P situé dans le secteur $B3$ sur le graphique précédent. On appelle r le module de z_P et θ son argument dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$. Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour θ (aucune justification n'est demandée) :

Proposition A	**Proposition B**	**Proposition C**	**Proposition D**
$40 < r < 60$ et $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$	$20 < r < 40$ et $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{4}$	$40 < r < 60$ et $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$	$0 < r < 60$ et $\dfrac{-\pi}{2} < \theta < \dfrac{-\pi}{4}$

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :

a. $z = 70e^{\frac{-i\pi}{3}}$;
b. $z = -45\sqrt{3} + 45i$.

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50e^{\frac{i\pi}{3}}$.
En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre.
Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50e^{\frac{i\pi}{3}}$, l'affixe z du point d'impact réel de la foudre admet :
- un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 5$;
- un argument qui peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\dfrac{\pi}{3}$ et d'écart type $\dfrac{\pi}{12}$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes, c'est-à-dire que, quels que soient les intervalles I et J, les évènements $(M \in I)$ et $(T \in J)$ sont indépendants.
Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.

1. Calculer la probabilité $P(M < 0)$ et interpréter le résultat obtenu.
2. Calculer la probabilité $P(M \in]40\ ;\ 60[)$.
3. On admet que $P\left(\dfrac{\pi}{4} < T < \dfrac{\pi}{2}\right) = 0{,}819$. En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur $B3$ selon cette modélisation.