APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE
CORRECTION DES EXERCICES DU LIVRE

49 page 286

1. $a=-2$ et $b=1$ vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et vecteur normal : $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$
2. $y=-x+5 \Leftrightarrow x+y-5=0$ $a=1$ et $b=1$ vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et vecteur normal : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
3. $a=3$ et $b=0$ vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et vecteur normal : $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$
4. $a=0$ et $b=-5$ vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ et vecteur normal : $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$

51 page 286

$y=\dfrac{3}{7}x+9 \Leftrightarrow 7y=3x+63 \Leftrightarrow 3x-7y+63=0.$

Soit Δ la perpendiculaire à d passant par l'origine du repère.

$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d et donc un vecteur directeur de Δ. Ainsi, Δ a une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $-b=3$; $a=-7$ et $c\in\mathbb{R}$.

$-b=3 \Leftrightarrow b=-3.$

Ainsi Δ a pour équation $-7x-3y+c=0$ avec c un réel.

$O(0\,;0)\in\Delta$ donc $-7\times0-3\times0+c=0$, c'est-à-dire $c=0$.

Δ a pour équation $-7x-3y=0$, ou encore $\mathbf{7x+3y=0.}$

52 page 286

$\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{6}y=5 \Leftrightarrow 4x-5y-30=0.$

Soit Δ la perpendiculaire à d passant par l'origine du repère.

$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d et donc un vecteur directeur de Δ. Ainsi, Δ a une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $-b=4$; $a=-5$ et $c\in\mathbb{R}$.

$-b=4 \Leftrightarrow b=-4.$

Ainsi Δ a pour équation $-5x-4y+c=0$ avec c un réel.

$O(0\,;0)\in\Delta$ donc $-5\times0-4\times0+c=0$, c'est-à-dire $c=0$.

Δ a pour équation $-5x-4y=0$, ou encore $\mathbf{5x+4y=0.}$

53 page 287

Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$ et soit I le milieu de $[AB]$.

Δ est la perpendiculaire à (AB) passant par I.

$I\left(\dfrac{22+17}{2}\,;\,\dfrac{53+12}{2}\right)$ donc $I(19{,}5\,;32{,}5)$.

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5\\41\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ donc Δ a une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $a=5$; $b=41$ et $c\in\mathbb{R}$.

Ainsi Δ a pour équation $5x+41y+c=0$ avec c un réel.

$I(19{,}5\,;32{,}5)\in\Delta$ donc $5\times19{,}5+41\times32{,}5+c=0$, c'est-à-dire $c=-1430$.

Δ a pour équation $\mathbf{5x+41y-1430=0.}$

55 page 287

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d donc d a pour équation $4x+5y+c=0$ avec c un réel.

$A(-6\,;8)\in d$ donc $4\times(-6)+5\times8+c=0$, c'est-à-dire $c=-16$

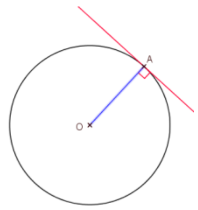
d a pour équation $\mathbf{4x+5y-16=0}$.

2. $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d donc d a pour équation $8x+12y+c=0$ avec c un réel.
$B(4\,;7)\in d$ donc $8\times4+12\times7+c=0$, c'est-à-dire $c=-116$.
d a pour équation $8x+12y-116=0$ ou encore $\mathbf{2x+3y-29=0}$ (en divisant par 4).

3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.
En procédant comme dans le 2, d a pour équation $\mathbf{10x-y+117=0.}$

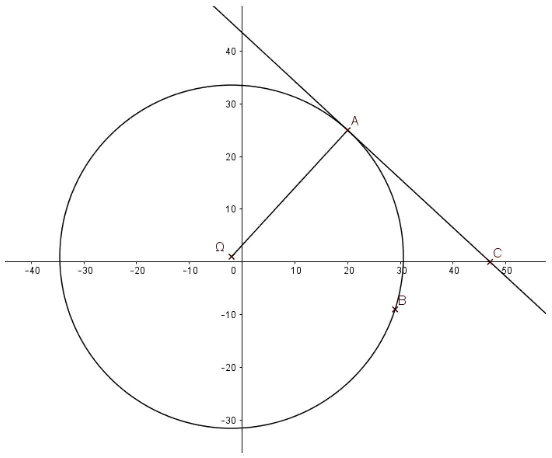
A retenir pour la suite :

La tangente à un cercle en un point est la perpendiculaire au rayon en ce point : sur la figure ci-contre, le cercle a pour centre O et passe par A. Alors la tangente au cercle en A est la perpendiculaire à (OA) passant par A.



63 page 287

1.



B semble appartenir au cercle.

2. Le rayon du cercle est $\Omega A=\sqrt{(20+2)^2+(25-1)^2}=\sqrt{1060}$
Alors le cercle a pour équation $\mathbf{(x+2)^2+(y-1)^2=1060}$ **ou encore** $\mathbf{x^2+y^2+4x-2y-1055=0.}$

3. Méthode 1 : $\Omega B=\sqrt{(29+2)^2+(-9-1)^2}=\sqrt{1061}$. $\Omega B\neq\Omega A$ donc $\boldsymbol{B}$ **n'appartient pas au cercle.**
Méthode 2 : $29^2+(-9)^2+4\times29-2\times(-9)-1055=1\neq0$ donc $\boldsymbol{B}$ **n'appartient pas au cercle.**

4. La droite (AC) est tangente au cercle ssi elle est perpendiculaire au rayon $[\Omega A]$.
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}27\\-25\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}22\\24\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{\Omega A}=27\times22+(-25)\times24=-6\neq0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{\Omega A}$ ne sont pas orthogonaux donc les droites $(AC)\ et(\Omega A)$ ne sont pas perpendiculaires : **la droite $\boldsymbol{(AC)}$ n'est pas tangente au cercle.**

65 page 288

$x^2+y^2-8x-2y+8=0\Leftrightarrow(x-4)^2-16+(y-1)^2-1+8=0\Leftrightarrow(x-4)^2+(y-1)^2=3^2$.
L'équation est celle du cercle de centre $\boldsymbol{I}(4;1)$ et de rayon 3.

66 page 288

$x^2+y^2-14x+8y+90=0\Leftrightarrow(x-7)^2-49+(y+4)^2-16+90=0\Leftrightarrow(x-7)^2+(y+4)^2=-25$
L'équation n'est pas celle d'un cercle car $-25<0$. C'est une équation de l'ensemble vide.

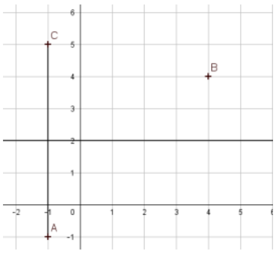
78 page 289

1. Le cercle a pour équation $\mathbf{(x-2)^2+(y-1)^2=25}$ ou encore $\mathbf{x^2+y^2-4x-2y-20=0.}$
2. $(5-2)^2+(-3-1)^2=3^2+4^2=25$ donc $\boldsymbol{B}$ **est un point du cercle.**
3.

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b. T est la perpendiculaire à (AB) passant par B. Alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à T.
T a donc pour équation $3x-4y+c=0$ où $c\in\mathbb{R}$.
$B(5\,;\,-3)\in T$ donc $3\times5-4\times(-3)+c=0$, c'est-à-dire $c=-27$.
Ainsi, T a pour équation $\mathbf{3x-4y-27=0}$.

79 page 289



1. La médiatrice D de $[AC]$ a pour équation $y=2$. On le prouve facilement : $x_A = x_C$ donc (AC) est parallèle à l'axe des ordonnées donc sa médiatrice est parallèle à l'axe des abscisses. Elle a donc une équation de la forme $y=c$ où c est un réel. De plus, le milieu I de $[AC]$ a pour coordonnées $(-1\,;\,2)$ donc la médiatrice a pour équation $y=2$.

2. $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\begin{pmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Soit J le milieu de $[BC]$. La médiatrice Δ de $[BC]$ est la perpendiculaire à (BC) passant par J.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ donc Δ a une équation de la forme $-5x+y+c=0$ où c est un réel.

$J(1,5\,;\,4,5)\in\Delta$ donc $-5\times1{,}5+4{,}5+c=0$, c'est-à-dire $c=3$.

Ainsi **Δ a pour équation $\mathbf{-5x+y+3=0}$.**

3. Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle.
Soit Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Alors Ω est le point d'intersection de D et Δ.
D a pour équation $y=2$ et Δ a pour équation $-5x+y+3=0$ donc les coordonnées de Ω sont un couple solution du système $(S)\begin{cases} y=2 \\ -5x+y+3=0 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ -5x+2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$.

Ainsi **le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est $\Omega(1;2)$.**

81 page 289

1. Soit Δ_1 la hauteur du triangle ABC issue de A.

Δ_1 est la perpendiculaire à (BC) passant par A. Elle a donc pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Δ_1 a donc une équation de la forme $8y+c=0$ où c est un réel.
$A(-2\,;\,-3)\in\Delta_1$ donc $8\times(-3)+c=0$, c'est-à-dire $c=24$.
Δ_1 a pour équation $8y+24=0$, ou encore (en divisant par 8) : $\boldsymbol{y+3=0}$.

2.

a. $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB}=-1\times6+(-2)\times(-3)=0$. Alors **$\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.**

b. Soit Δ_2 la hauteur du triangle ABC issue de C.

Δ_2 est la perpendiculaire à (AB) passant par C. Elle a donc pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Δ_2 a donc une équation de la forme $-2x+y+c=0$ où c est un réel.
$C(4\,;\,2)\in\Delta_2$ donc $-2\times4+2+c=0$, c'est-à-dire $c=6$
Δ_2 a pour équation $\mathbf{-2x+y+6=0}$.

3. L'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection des hauteurs du triangle.
Soit Ω l'orthocentre du triangle ABC.
Alors Ω est le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2.
Δ_1 a pour équation $y+3=0$ et Δ_2 a pour équation $-2x+y+6=0$ donc les coordonnées de Ω sont un couple solution du système (S) $\begin{cases} y+3=0 \\ -2x+y+6=0 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ -2x-3+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$. Ainsi **l'orthocentre du triangle ABC est $\Omega\left(-3;\frac{3}{2}\right)$.**

89 page 290

1. **$B(5;3)$ et $D(-2;3)$**. L'ordonnée à l'origine de (AC) est 0 et son coefficient directeur est $\frac{6}{3}=2$ donc **(AC) a pour équation $y=2x$.**
2. $D(-2\,;3)$ et $C(3\,;6)$.
Méthode 1 : on vérifie que l'équation donnée convient.
$3\times(-2)-5\times3+21=0$ et $3\times3-5\times6+21=0$ donc la droite d'équation $3x-5y+21=0$ passe par D et C : **c'est la droite (DC).**
Méthode 2 : on retrouve une équation de la droite (DC) :
$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (DC) donc (DC) a pour équation $3x-5y+c=0$ où c est un réel.
$C(3\,;6)\in(DC)$ donc $3\times3-5\times6+c=0$, c'est-à-dire $c=21$.
Ainsi **(DC) a pour équation $3x-5y+21=0$.**
3. Soit Δ la médiatrice de (AC). $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ est normal à Δ donc Δ a pour équation $3x+6y+c=0$ où c est un réel.
Le milieu I de $[AC]$ a pour coordonnées $(1{,}5\,;3)$.
$I(1{,}5\,;3)\in\Delta$ donc $3\times1{,}5+6\times3+c=0$, c'est-à-dire $c=-22{,}5$.
Ainsi **Δ a pour équation $3x+6y-22{,}5=0$** ou encore **$x+2y-7{,}5=0$** (en divisant par 3).
4. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu donc (MN) est la médiatrice Δ de $[AC]$.
N est donc le point d'intersection de Δ et (DC). Alors ses coordonnées sont un couple de solutions du système (S) $\begin{cases} x+2y-7{,}5=0 \\ 3x-5y+21=0 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6y-22{,}5=0 \\ 3x-5y+21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6y=22{,}5 \\ 11y=-43{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6\times\frac{87}{22}=22{,}5 \\ y=\frac{87}{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{9}{22} \\ y=\frac{87}{22} \end{cases}$

Ainsi **$N\left(-\frac{9}{22};\frac{87}{22}\right)$**.
Pour déterminer les coordonnées de M, on peut commencer par chercher une équation de la droite (AB) puis utiliser le fait que M est l'intersection de (AB) et Δ. Mais ce sera long. Il est plus rapide d'utiliser le fait que $[MN]$ et $[AC]$ ont le même milieu.
$I(1{,}5\,;3)$ est le milieu de $[AC]$ donc aussi celui de $[MN]$.

On a donc $\begin{cases} x_I=\frac{x_M+x_N}{2} \\ y_I=\frac{y_M+y_N}{2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} 1{,}5=\frac{x_M-\frac{9}{22}}{2} \\ 3=\frac{y_M+\frac{87}{22}}{2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_M=\frac{75}{22} \\ y_M=\frac{45}{22} \end{cases}$. Ainsi **$M\left(\frac{75}{22};\frac{45}{22}\right)$**.

94 page 291

1. $ABCD$ est un carré donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ donc $\begin{cases} x_A - 3 = 1-3 \\ y_A - 0 = 2-2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = 0 \end{cases}$. Ainsi $\boldsymbol{A(1;0)}$.
2. $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est directeur de (BD) donc (BD) a pour équation $2x+2y+c=0$ avec c un réel.
   $B(3\,;0) \in (BD)$ donc $2\times 3+2\times 0+c=0$, c'est à drie $c=-6$. Ainsi **(BD) a pour équation $2x+2y-6=0$** ou encore $\boldsymbol{x+y-3=0}$.
3.
   a. $A(1\,;0) \in D_m \Leftrightarrow m\times 1-(m+2)\times 0+1=0 \Leftrightarrow m=-1$.

   b. D_m a pour vecteur normal $\vec{u_m}\begin{pmatrix} m \\ -m-2 \end{pmatrix}$ et (BD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   $$\begin{aligned} D_m \perp (BD) &\Leftrightarrow \vec{u_m} \text{ et } \overrightarrow{BD} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det\left(\vec{u_m}\,;\ \overrightarrow{BD}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow 2m-(-m-2)\times(-2)=0 \\ &\Leftrightarrow -4=0 \end{aligned}$$

   Il n'existe donc pas de valeur de m tel que D_m soit perpendiculaire à (BD).

100 page 292

Le cercle circonscrit au carré $ABCD$ a pour centre le milieu I de $[AC]$ et $[BD]$ et pour rayon IA.
$I\left(\frac{2+8}{2}\,;\ \frac{0+2}{2}\right)$ donc $I(5\,;1)$ et $IA=\sqrt{(2-5)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}$
Alors le cercle circonscrit au carré $ABCD$ a pour équation $\boldsymbol{(x-5)^2+(y-1)^2=10}$, ou encore $\boldsymbol{x^2+y^2-10x-2y+16=0}$.

111 page 294

1. La distance de M à l'axe des abscisses est $d=|y|$ donc le carré de cette distance est $|y|^2=y^2$.
2. $MF^2=(0-x)^2+(4-y)^2=x^2+y^2-8y+16$.
3. M est équidistant de F et de l'axe des abscisses ssi $MF=d$
   ssi $MF^2=d^2$ car MF et d sont positifs.
   ssi $x^2+y^2-8y+16=y^2$
   ssi $x^2-8y+16=0$

L'ensemble $\mathscr{P}$ des points équidistants de F et de l'axe des abscisses a pour équation $x^2-8y+16=0$ ou encore $y=\frac{1}{8}x^2+2$. C'est donc la parabole représentant la fonction trinôme définie par $f(x)=\frac{1}{8}x^2+2$.