CORRECTION DES EXERCICES 79 ET EX POUR LES VOLONTAIRES A FAIRE POUR LE MARDI 5 MAI

Exercice N°79 p 193 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$

1) Ensemble de définition :

La fonction f est définie pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas le dénominateur.
Pour tout $\in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ $donc$ $e^x \neq 0$. Donc **f est définie sur** $\mathbb{R}$

2) **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec

$$u(x) = x + 2 \quad et \quad v(x) = e^x$$
$$u'(x) = 1 \quad et \quad v'(x) = e^x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1 \times e^x - e^x(x+2)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-(x+2))}{e^x \times e^x} \qquad on\ factorise\ le\ numérateur\ par\ e^x$$

$$f'(x) = \frac{1-x-2}{e^x} = \frac{-x-1}{e^x} \qquad on\ \ simplifie\ \ par\ e^x$$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

$-x - 1 > 0 \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	**0**	$-$	
e^x		$+$	$\vdots$	$+$	
$f'(x)$		$+$	**0**	$-$	

c. Tableau de variations

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	**0**	$-$	
f		$\nearrow$	**e**	$\searrow$	

$$f(-1) = \frac{-1+2}{e^{-1}} = \frac{1}{e^{-1}} = e^1 = e$$

3) **a.** Pour répondre à cette question, il faut montrer que le coefficient directeur de la tangente, à la courbe de f, au point d'abscisse -1 est nul. Ce coefficient directeur est le nombre dérivé de f en -1.

$$f'(-1) = \frac{-(-1)-1}{e^{-1}} = \frac{1-1}{e^{-1}} = 0$$

$f'(-1) = 0$ donc le coefficient directeur de la tanente à la courbe de f au point d'abscisse -1 est nul. On peut donc en conclure que cette tangente est horizontale.

b. L'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$f'(0) = \frac{-0-1}{e^0} = -1 \ \ et \ \ f(0) = \frac{0+2}{e^0} = 2$$

Exercice pour les volontaires :

La courbe de la fonction f définie par $f(x) = (x-1)e^{1-x}$ admet-elle des tangentes passant par l'origine ?

Soit a un réel et soit T_a la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1e^{1-x} + (x-1)\times(-e^{1-x}) = e^{1-x}(1-x+1) = (2-x)e^{1-x}$.

Alors T_a a pour équation $y = (2-a)e^{1-a}(x-a) + (a-1)e^{1-a}$

T_a passe par l'origine ssi $0 = (2-a)e^{1-a}(-a) + (a-1)e^{1-a}$

ssi $e^{1-a}(-2a + a^2 + a - 1) = 0$

ssi $(a^2 - a - 1)e^{1-a} = 0$

ssi $a^2 - a - 1 = 0$ car $e^{1-a} \neq 0$ $\qquad \Delta = 5 \qquad a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

La courbe de f admet deux tangentes passant par l'origine : aux points d'abscisses $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.