LA FONCTION EXPONENTIELLE

En bleu : ce qui aurait pu être dit à l'oral. Ce n'est pas rigoureux !
En violet : ce qui est un peu plus compliqué, ce n'est pas grave si vous ne le comprenez pas.
En orange, les numéros des exercices. Certains seront dans le plan de travail. D'autres, parfois plus difficiles ne sont que pour les volontaires. Ce sont les ex du chapitre 6 du livre.

Vous avez sûrement entendu parler dans les médias d'une hausse exponentielle du nombre de malades.
Dans la description de nombreux phénomènes (croissance de population, multiplication des bactéries, désintégration radioactive, ou propagation d'une maladie …), la vitesse de variation d'une quantité est proportionnelle à cette quantité.
Si la quantité étudiée s'exprime par la fonction f de la variable réelle t, on a alors $f'(x) = k \times f(x)$ où k est un réel non nul.
Lorsque ce coefficient est positif, la quantité augmente très vite : on parle alors de **croissance exponentielle.** comme en ce moment avec le nombre de malades.

Sauf mention contraire, tous les théorèmes et propriétés sont admis.
L'objet de ce chapitre est d'étudier une nouvelle fonction, la fonction exponentielle qui n'est pas définie par une formule comme d'habitude.

On connaît une fonction dont la dérivée est $2x$ (c'est x^2), on connaît une fonction dont la dérivée est $-\frac{1}{x^2}$ (c'est $\frac{1}{x}$) … mais connaissez vous une fonction qui soit égale à sa dérivée ? NON !
Dans l'étude de nombreux phénoménes physiques, économiques …, on a besoin d'une fonction qui soit égale à sa dérivée.
On "invente" (on peut montrer qu'elle existe et qu'il n'y en a qu'une) une fonction égale à sa dérivée et par laquelle l'image de 0 est 1. On l'appelle la fonction exponentielle.

I. La fonction exponentielle.

1. Définition et propriétés.

Théorème : Il existe une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle, et notée exp.
On a donc : pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

La fonction exponentielle (notée exp) est donc une nouvelle fonction. Vous ne pouvez pas calculer exp(3) à la main par exemple : il n'y a pas de formule simple pour calculer exp(3).

Propriétés : pour tous réels a et b et pour tout entier n :

(1) $\exp(a) \times \exp(b) = \exp(a+b)$ (2) $\frac{1}{\exp(a)} = \exp(-a)$

(3) $\frac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a-b)$ (4) $(\exp(a))^n = \exp(na)$

Exemples :
$\exp(3)\times\exp(7)=\exp(3+7)=\exp(10)$ (c'est la propriété 1)
$\exp(-4) = \frac{1}{\exp(4)}$ (c'est la propriété 2)
$\frac{\exp(8)}{\exp(2)} = \exp(8-2) = \exp(6)$ (c'est la propriété 3)
$(\exp(5))^3 = \exp(5\times3) = \exp(15)$ (c'est la propriété 4)

Nous ferons plus d'exemples et d'exercices d'application lorsque nous aurons vu une autre notation pour $\exp(x)$.

Démonstrations des deux premiers points :

Pour information (essayez de la lire si vous voulez garder la spé maths l'an prochain)

Propriété admise : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout x de I, $f'(x) = 0$. Alors f est constante sur I.

Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(a + b - x) \times f(x)$ où f est la fonction exponentielle.
f est dérivable sur I et pour tout x de P : $g'(x) = -f'(a + b - x) \times f(x) + f(a + b - x) \times f'(x) = 0$ car $f = f'$.
g est donc constante sur I Donc $g(b) = g(0)$ c'est à dire $f(a) \times f(b) = f(a + b) \times f(0) = f(a + b)$ car $f(0) = 1$.
On a donc bien $e^{a+b} = e^a \times e^b$ puisque f est la fonction exponentielle.

- $\exp(0) = \exp(a - a) = \exp(a) \times \exp(-a)$. Or $\exp(0) = 1$ donc $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.

2. La notation e^x.

Définition : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e. On a donc $\exp(1) = e$.

e est un **nombre** irrationnel (cela signifie que l'on ne peut pas l'écrire sous la forme d'une fraction de deux nombres entiers) dont une valeur approchée est 2,718.
On a pour tout entier n : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$ (c'est la propriété 4)
On généralise la notation à tous les réels en **notant e^x le nombre $\exp(x)$.**

e^x est une **NOTATION** pour écrire $\exp(x)$. Cela ne se lit pas "e puissance x" mais "**exponentielle de x**". En effet, e puissance x" n'a pas de sens pour vous si x n'est pas entier. Par exemple, $3^{1,2}$ n'a pas de sens pour vous.
On a défini la fonction exponentielle comme la fonction égale à sa dérivée et dont l'image de 0 est *1*.
On a alors :

La fonction exponentielle qui à x associé e^x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même. De plus, $e^0 = 1$

"Traduisons" les propriétés que nous avons vues avant à l'aide de la notation e^x :
$exp(a) \times exp(b) = exp(a + b)$ devient $e^a \times e^b = e^{a+b}$
$\dfrac{1}{exp(a)} = exp(-a)$ devient $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$
$\dfrac{exp(a)}{exp(b)} = exp(a - b)$devient $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
$(exp(a))^n = exp(na)$ devient $(e^a)^n = e^{na}$
On voit que l'on retrouve les mêmes règles de calcul qu'avec les puissances. Cela justifie la notation e^x. Maintenant, on utilisera la notation e^x à la place de $\exp(x)$.
On a donc :

Pour tous réels a et b et pour tout entier n :
$e^{a+b} = e^a \times e^b$ $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $\quad (e^a)^n = e^{na}$

Chercher les exemples au brouillon avant de regarder la correction.

Exemple 1:
Simplifier les expressions suivantes :
$A = e^{3x} \times e^{5-x}$ $\quad B = \dfrac{e^{2x+3}}{e^{x-4}}$ $\quad C = (e^{x+1})^2 \times (e^{-x+1})^3$

Exemple 2:
Factoriser :
$A = e^{x+1} + e^x$ $\quad B = e^{2x} - e^x$ $\quad C = e^x + 4e^{3x-5}$ $\quad D = 2e^x + e^{2x}$

Exemple 3:
Montrer les égalités suivantes :
a. pour tout réel x, $e^{-1+x} \times e^{x+3} = (e^{x+1})^2$
b. pour tout réel x, $e^{2x} - 4e^x - 5 = (e^x - 5)(e^x + 1)$

c. pour tout réel x, $\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ (plus dur)

Correction des exemples :

Exemple 1:

$A=e^{3x}\times e^{5-x}=e^{3x+5-x}=e^{2x+5}$

$B=\dfrac{e^{2x+3}}{e^{x-4}}=e^{(2x+3)-(x-4)}=e^{2x+3-x+4}=e^{x+7}$

$C=\left(e^{x+1}\right)^2\times\left(e^{-x+1}\right)^3=e^{2(x+1)}\times e^{3(-x+1)}=e^{2x+2}\times e^{-3x+3}=e^{2x+2-3x+3}=e^{-x+5}$

Exemple 2:

Pour faire apparaître un facteur commun, on utilise le fait que $e^{a+b}=e^a e^b$ ou que $e^{na}=\left(e^a\right)^n$

$A=e^{x+1}+e^x=e^x e^1+e^x$ le facteur commun est e^x. Pour factoriser,il faut "voir" que $e^x=e^x\times 1$

$A=e^x e^1+e^x\times 1=e^x\left(e^1+1\right)$

$B=e^{2x}-e^x=\left(e^x\right)^2-e^x\times 1=e^x\left(e^x-1\right)$

$C=e^x+4e^{3x-5}=e^x+4e^{x+2x-5}=e^x\times 1+e^x\times 4e^{2x-5}=e^x\left(1+4e^{2x-5}\right)$

$D=2e^x+e^{2x}=2e^x+\left(e^x\right)^2=e^x\left(2+e^x\right)$

Exemple 3:

a. Soit x un réel.
Il faut transformer les deux membres pour arriver à la même chose.
D'une part $e^{-1+x}\times e^{x+3}=e^{-1+x+x+3}=e^{2x+2}$
D'autre part, $\left(e^{x+1}\right)^2=e^{2\times(x+1)}=e^{2x+2}$
On trouve la même chose donc , $e^{-1+x}\times e^{x+3}=\left(e^{x+1}\right)^2$

b. Soit x un réel.
On ne peut pas transformer le membre de droite mais on peut développer celui de droite.
$\left(e^x-5\right)\left(e^x+1\right)=e^x\times e^x-5e^x+e^x-5=e^{x+x}-4e^x-5=e^{2x}-4e^x-5$ On retrouve bien le membre de gauche donc $e^{2x}-4e^x-5=\left(e^x-5\right)\left(e^x+1\right)$

c. Soit x un réel.
On va transformer le membre de droite en remplaçant e^{-x} par $\dfrac{1}{e^x}$ puis en mettant au même dénominateur.
$\dfrac{1}{1+e^{-x}}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=\dfrac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ On retrouve bien le membre de gauche donc $\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Utilisation de la calculatrice :

CASIO	***TI***
SHIFT ln	2ND LN

Vérifiez que vous obtenez bien $e^2\approx 7{,}389$

43, 44, 45, 47, 48 p191 (simplifications) ; 83 puis 92

II. Étude de la fonction exponentielle.

Théorème : Quel que soit le réel x; $\exp(x)>0$, c'est-à-dire $e^x>0$

Une exponentielle (de n'importe quel nombre) est toujours positive.

Par exemple, $e^{-2} > 0$; $e^{-3x+8} > 0$ pour tout réel x.

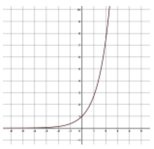
On va chercher les variations de la fonction exponentielle. Pour cela, on cherche le signe de sa dérivée. Or, on a vu que la fonction exp est égale à sa dérivée ($\exp' = \exp$) et que $\exp(x) = e^x$ est toujours > 0.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$. On peut donc construire le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $\exp'(x)$		$+$	
variation de exp		1 ↗	

<u>Représentation graphique :</u>

Vous devez retenir l'allure de la courbe. Elle est proche de l'axe des abscisses quand x tend vers $-\infty$; elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et elle monte très vite ensuite.



<u>Conséquences</u> : $x<0 \Leftrightarrow e^x<1$ **et** $x>0 \Leftrightarrow e^x>1$.
Pour tous réels a et b, $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.
$e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

Deux nombres sont égaux ssi leurs exponentielles sont égales.
Deux nombres sont dans le même ordre que leurs exponentielles.
Dans une équation ou une inéquation, on peut "supprimer les exponentielles" à condition d'avoir $e^{\cdots}$ d'un côté et $e^{\cdots}$ de l'autre (pas de coefficient devant $e^{\cdots}$ et pas deux $e^{\cdots}$ du même côté du $=$.

Chercher l exemple au brouillon avant de regarder la correction.

<u>Exemple :</u>

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- ***a.*** $e^x = e^6$
- ***b.*** $e^x = -5$
- ***c.*** $e^x = 0$
- ***d.*** $2e^x = 2$
- ***e.*** $e^x \times e^4 = 1$
- ***f.*** $3e^x > 3e^4$
- ***g.*** $-2e^{3x+1} \leqslant -2$
- ***h.*** $e^{2x+4} + 5 > 2$

<u>Correction de l'exemple :</u>

- ***a.*** On applique la conséquence :
  $e^x = e^6 \Leftrightarrow x = 6$ **La solution est 6**
- ***b.*** Une exponentielle est toujours strictement positive **l'équation n'a pas de solution.**
- ***c.*** Une exponentielle est toujours strictement positive **l'équation n'a pas de solution.**
- ***d.*** Il faut d'abord essayer d'avoir juste $e^{\cdots}$ dans le membre de gauche
  $2e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = 1$ On peut maintenant appliquer la conséquence
  $2e^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ **La solution est 0**

e. Il faut d'abord essayer d'avoir juste $e^{\cdots}$ dans le membre de gauche en appliquant la formule $e^a \times e^b = e^{a+b}$

$e^x \times e^4 = 1 \Leftrightarrow e^{x+4} = 1$ On doit maintenant avoir $e^{\cdots} = e^{\cdots}$

$e^x \times e^4 = 1 \Leftrightarrow e^{x+4} = e^0$ On peut maintenant appliquer la conséquence

$e^x \times e^4 = 1 \Leftrightarrow x+4 = 0$

$e^x \times e^4 = 1 \Leftrightarrow x = -4$ **La solution est -4**

f. Il faut d'abord essayer d'avoir juste $e^{\cdots}$ dans le membre de gauche

$3e^x > 3e^4 \Leftrightarrow e^x > e^4$ On peut maintenant appliquer la conséquence

$3e^x > 3e^4 \Leftrightarrow x > 4$ **L'ensemble des solutions est $]4;+\infty[$.**

g. Il faut d'abord essayer d'avoir juste $e^{\cdots}$ dans le membre de gauche. Pour cela, on divise par -2 et comme -2 est négatif, on change le sens de l'inégalité :

$-2e^{3x+1} \leqslant -2 \Leftrightarrow e^{3x+1} \geqslant 1$ On peut maintenant appliquer la conséquence

$-2e^{3x+1} \leqslant -2 \Leftrightarrow 3x+1 \geqslant 0$

$-2e^{3x+1} \leqslant -2 \Leftrightarrow 3x \geqslant -1$

$-2e^{3x+1} \leqslant -2 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{-1}{3}$ car on divise par 3 qui est positif

L'ensemble des solutions est $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$..

h. Il faut d'abord essayer d'avoir juste $e^{\cdots}$ dans le membre de gauche

$e^{2x+4}+5 > 2 \Leftrightarrow e^{2x+4} > -3$

Or une exponentielle est toujours positive donc toujours supérieure à -3. Quel que soit la valeur de x, e^{2x+4} sera supérieur à 0 et donc à -3.

L'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

88, 89, 90, 91 (équations)

Chercher les applications au brouillon avant de regarder la correction.

Application 1 A RETENIR :

Construire le tableau de signe des expressions suivantes :

$A = 2e^{x+1}$

$B = -3e^x$

$C = 3e^{-x}+7$

$D = 5e^{-3x+8}$

$E = e^x - 1$

$F = xe^x - 7e^x$

$G = e^{x-1} - e^x$ plus difficile

Application 2 :

a. Construire le tableau de variation de la fonction f définie **sur** $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x + 1$.

b. Construire le tableau de variation de la fonction g définie **sur** $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x(e^x+1)$.

Application 3 :

Résoudre les équations suivante :

a. $(e^x+3)(e^x-1) = 0$

b. $e^{2x}+4e^x-5 = 0$ plus difficile

Correction des applications

Application 1 A RETENIR :

Ne pas oublier qu'une exponentielle est toujours positive et utiliser la conséquence en haut de la page 4.

$A=2e^{x+1}$

On construit le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
2	$+$
e^{x+1}	$+$ car une exp est toujours >0
$2e^{x+1}$	$+$

$B=-3e^{x}$

On construit le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
-3	$-$
e^{x}	$+$ car une exp est toujours >0
$-3e^{x}$	$-$

$C=3e^{-x}+7$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$ car une exponentielle est toujours positive.

Donc $C=3e^{-x}+7>0$ (on multiplie un nombre positif par 3 et on ajoute 7 donc le résultat est positif)

On construit le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$3e^{-x}+7$	$+$

Attention : on ne peut pas faire une ligne pour $3e^{-x}$ et une ligne pour 7 car ce n'est pas un produit !!!

$D=5e^{-3x+8}$

On construit le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
5	$+$
e^{-3x+8}	$+$ car une exp est toujours >0
$5e^{-3x+8}$	$+$

$E=e^{x}-1$

Attention : on ne peut pas faire une ligne pour e^{x} et une ligne pour -1 car ce n'est pas un produit !!!

On cherche quand $e^{x}-1$ est positif :

$e^{x}-1>0 \Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow x>0$ d'après la conséquence.

on a trouvé que $e^{x}-1$ est positif $(+)$ lorsque x est supérieur à 0. On met donc les $+$ dans le tableau pour x après 0.

De même, $e^{x}-1<0 \Leftrightarrow x<0$ donc on met les $-$ dans le tableau lorsque x est avant 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{x}-1$	$-$		$+$

Vous pouvez apprendre ce tableau par cœur et l'admettre.

$F=xe^{x}-7e^{x}$

On a une différence et le signe n'est pas évident donc ON FACTORISE ! Le facteur commun est e^{x}.

$F=e^{x}(x-7)$ $\qquad$ e^{x} est toujours positif

On construit le tableau suivant :

x	$-\infty$	7	$+\infty$
e^{x}	$+$		$+$
$x-7$	$-$		$+$
$e^{x}(x-7)$	$-$		$+$

$G=e^{x-1}-e^{x}$ plus difficile

On a une différence et le signe n'est pas évident donc ON FACTORISE ! Le facteur commun est e^{x} car on peut écrire $e^{x-1}=e^{x}\times e^{-1}$

$G=e^{x}\left(e^{-1}-1\right)$ A la calculatrice, $e^{-1}-1\approx -0{,}63<0$

On construit le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^{x}	$+$
$e^{-1}-1$	$-$
$e^{x}\left(e^{-1}-1\right)$	$-$

Application 2 :

a. $f(x) = xe^x + 1$. Pour construire le tableau de variations de f, on cherche le signe de sa dérivée.
Pour dériver f, on utilise $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$ puisque la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même (voir plus haut)
Attention : ici, $+1$ n'est pas dans la parenthèse donc on le dérive à part.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x) = 1e^x + xe^x + 0 = e^x + xe^x$.
Pour déterminer le signe de $f'(x)$, on FACTORISE. Le facteur commun est e^x.
$f'(x) = e^x(1+x)$.
On construit le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
e^x	$+$		$+$
$1+x$	$-$		$+$
signe de $f'(x) = e^x(1+x)$	$-$		$+$
variations de f	$\searrow$	$\dfrac{-1}{e}+1$	$\nearrow$

$f(-1) = -1e^{-1} + 1 = \dfrac{-1}{e^1} + 1 = \dfrac{-1}{e} + 1$ puisque e^1 est le nombre noté e.

b. Construire le tableau de variation de la fonction g définie **sur $\mathbb{R}_+$** par $g(x) = x(e^x + 1)$.
Attention : ici g est définie sur $\mathbb{R}+$ donc $x \geqslant 0$
Pour construire le tableau de variations de g, on cherche le signe de sa dérivée.
Pour dériver g, on utilise $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x + 1$. On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x + 0 = e^x$ puisque la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même.
Attention : ici, $+1$ est pas dans la parenthèse donc il fait partie de $v(x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}+$. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $g'(x) = 1(e^x + 1) + xe^x = e^x + 1 + xe^x$.
$x \geqslant 0$ et $e^x > 0$ donc $e^x + 1 + xe^x > 0$ En effet, $x \geqslant 0$ d'après l'énoncé et $e^x > 0$ (toujours).
On construit le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $g'(x) = e^x + 1 + xe^x$	$+$	
variations de g	$\nearrow$	

Application 3 :

Résoudre les équations suivante :

a. $(e^x + 3)(e^x - 1) = 0$
On a une équation produit nul. Donc on "sépare en deux".
$(e^x + 3)(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x + 3 = 0$ ou $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -3$ ou $e^x = 1$
$e^x = -3$ n'a pas de solution car une exponentielle est toujours positive
$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ d'après le cours (conséquence page 4)
Alors $(e^x + 3)(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **La solution est 0.**

b. $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$ plus difficile
On remarque que $e^{2x} = (e^x)^2$. On a donc une équation avec des e^x et des $(e^x)^2$.
On pose $X = e^x$.

$e^{2x} + 4e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 + 4X - 5 = 0 \end{cases}$

On résout $X^2 + 4X - 5 = 0$ en calculant le discriminant : $\Delta = 36$: $X_1 = -5$ et $X_2 = 1$.

Donc $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X = -5 \ ou \ X = 1 \end{cases} \Leftrightarrow e^x = -5$ ou $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ($e^x = -5$ n'a pas de solution car $-5 < 0$ et $e^x = 1$ a pour unique solution 0)
La solution est 0.

63, 64, 66 (dérivées) ; 69,70,71 (signes) ; 74 questions 1 à 3 (variations très faciles)
72 (justification du tableau de variations) ; 101 (initiative)

III. Applications de la fonction exponentielle.

1. Fonction $x \longmapsto e^{ax+b}$

Propriété : Soient a et b deux réels. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = ae^{ax+b}$.

Chercher les exemples au brouillon avant de regarder la correction.

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-5x+3}$. Calculer $f'(x)$.

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{5t}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout t de $\mathbb{R}$, $f'(t) = 5e^{5t} > 0$ donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^{-8t}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout t de $\mathbb{R}$, $g'(t) = -8e^{-8t} < 0$ donc g strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3e^{-2x+8} + 7$. Construire le tableau de variations de f.

Correction des exemples

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-5x+3}$. Calculer $f'(x)$.
On utilise la propriété ci-dessus avec $a = -5$ et $b = 3$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x) = -5e^{-5x+3}}$.

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{5t}$.
Pour construire le tableau de variations d'une fonction, on cherche le signe de sa dérivée.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout t de $\mathbb{R}$, $f'(t) = 5e^{5t}$.
On construit le tableau de signes en faisant une ligne pour 5 (toujours positif) et une ligne pour e^{5t} (toujours positif aussi car une exponentielle est toujours positif)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
5	$+$
e^{5t}	$+$
signe de $f'(t)$	$+$
variations de f	$\nearrow$

Exemple 3 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^{-8t}$.
Pour construire le tableau de variations d'une fonction, on cherche le signe de sa dérivée.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout t de $\mathbb{R}$, $g'(t) = -8e^{-8t}$.
On construit le tableau de signes en faisant une ligne pour -8 (toujours négatif) et une ligne pour e^{-8t} (toujours positif aussi car une exponentielle est toujours positif)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
-8	$-$
e^{-8t}	$+$
signe de $f'(t)$	$-$
variations de f	$\searrow$

Exemple 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3e^{-2x+8}+7$. Construire le tableau de variations de f.

Pour construire le tableau de variations d'une fonction, on cherche le signe de sa dérivée.

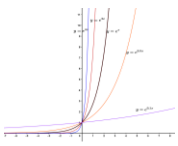
Pour dériver, on garde le -3 (constante multiplicative) et on dérive e^{-2x+8} en tuilisant la propriété ci-dessus avec $a = -2$ et $b = 8$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x) = -3\times(-2)e^{-2x+8}+0 = 6e^{-2x+8}$.

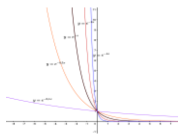
On construit le tableau de signes en faisant une ligne pour 6 (toujours positif) et une ligne pour e^{-2x+8} (toujours positif aussi car une exponentielle est toujours positif)

x	$-\infty$		$+\infty$
6		$+$	
e^{-2x+8}		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	
variations de f		$\nearrow$	

<u>Propriété</u> : soit k un réel.
Si $k > 0$, la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $k < 0$, la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



$k > 0$
Croissance exponentielle
les courbes montent très vite



$k < 0$
Décroissance exponentielle
les courbes descendent très vite

74 question 4 ; 75 (variations)
78, 79 (études de fonctions, tangentes pour le 79)
BILAN 2 PAGE207

<u>Plus dur :</u>
103 (initiative)
110 (position relative) et 111 pour prolonger
107 position relative avec paramètre