DEVOIR A LA MAISON N°3. $1^{ère}$ Spé maths

Pour le lundi 4 novembre 2019.

Vous pouvez poser des questions par mail si vous êtes bloqués.

<u>Exercice 1</u> :

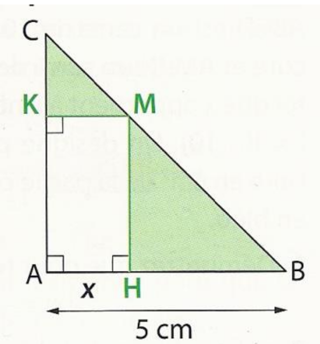
Soit f la fonction définie sur Ë par : $f(x)=3x^3-4x^2-25x+42$.

1. Montrer que -3 est une racine du polynôme f.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x)=(x+3)(ax^2+bx+c)$.
3. En déduire toutes les racines de f.
4. Résoudre l'inéquation $f(x)$Ã0.

<u>Exercice 2</u> : Dans le plan muni d'un repère, soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$' deux paraboles d'équations respectives $y=x^2+4x-12$ et $y=-x^2+x+2$.

1. Étudier la position relative de ces deux paraboles.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ avec les axes du repère.
3. Déterminer les abscisses des points pour lesquels $\mathcal{P}$ est en dessous de l'axe des abscisses.

<u>Exercice 3</u> :



1. f est la fonction définie sur Ë par $f(x)=x^2-5x+\frac{25}{2}$. Dresser le tableau de variation de f.
2. ABC est un triangle rectangle isocèle tel que $AB=AC=5$ cm. $AHMK$ est un rectangle. On pose $AH=x$.

On note $S(x)$ l'aire du domaine colorié *(ce domaine est constitué des aires des triangles CKM et MHB*)

a. Quel est l'ensemble de définition de la fonction S ?

b. Montrer que $S(x)=x^2-5x+\frac{25}{2}$.

c. Où doit-on placer le point H pour que l'aire du domaine colorié soit minimale ?
Donner cette aire minimale.

d. Résoudre dans l'intervalle [0 ; 5] l'inéquation $S(x)$Â$\frac{75}{8}$.

Si vous souhaitez faire des exercices supplémentaires afin de vous entrainer davantage, nous vous proposons la liste ci-dessous :

- Exercices : N° 127 et 131 p 62
- Faire le bilan p 67
- Faire le bilan p 37

CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N°3. 1Spé

Exercice 1 :

1. $f(-3) = 3 \times (-3)^3 - 4 \times (-3)^2 - 25 \times (-3) + 42 = 3 \times (-27) - 4 \times 9 - 25 \times (-3) + 42$

$f(-3) = -81 - 36 + 75 + 42 = -117 + 117 = 0$

$f(-3) = 0$ donc (-3) est une racine du polynôme *f*.

2. $(x+3)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c = ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+3b)x + 3c$

$f(x) = (x+3)(ax^2+bx+c)$ pour tout réel *x* ssi $3x^3 - 4x^2 - 25x + 42 = ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+3b)x + 3c$ pour tout réel *x*

On identifie et on obtient le système (S) : $\begin{cases} a = 3 \\ b + 3a = -4 \\ c + 3b = -25 \\ 3c = 42 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b + 3 \times 3 = -4 \\ c + 3b = -25 \\ c = 42 \div 3 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 - 9 = -13 \\ c = 14 \\ c = 14 \end{cases}$

Ainsi, **pour tout réel** $\boldsymbol{x}$**,** $\boldsymbol{f(x) = (x+3)(3x^2 - 13x + 14)}$**.**

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(3x^2 - 13x + 14) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0$ ou $3x^2 - 13x + 14 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $3x^2 - 13x + 14 = 0$

On résout l'équation : $3x^2 - 13x + 14 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \times 3 \times 14 = 169 - 168 = 1$

$\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-1}{6} = 2$ $\quad et \quad$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+1}{6} = \frac{7}{3}$

Ainsi $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=2$ ou $x=\frac{7}{3}$: **les racines de *f* sont − 3 ; 2 et** $\boldsymbol{\frac{7}{3}}$**.**

4. On peut construire le tableau de signes de $f(x)=(x+3)(3x^2-13x+14)$:

Le trinôme $3x^2-13x+14$ a pour racines 2 et $\frac{7}{3}$ et il est du signe de $a=3$ sauf entre ces racines.

x	$-\infty$		-3		2		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	**0**	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
$3x^2-13x+14$		$+$	⋮	$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	
$f(x)$		$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	

Ainsi,

$f(x)$Ã0 a pour ensemble de solutions *S*=[−3 ; 2]L$\left[\frac{7}{3}\right.$; +õ[.

Exercice 2 :

1. Positions relatives des deux paraboles :

On étudie le signe de la différence $x^2 + 4x - 12 - (-x^2 + x + 2) = 2x^2 + 3x - 14$

On cherche les racines de $2x^2+3x-14$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-14) = 9 + 112 = 121$

$\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines qui sont $x_1=\frac{-7}{2}$ et $x_2=2$ et il est du signe de $a=2>0$ sauf entre ces racines. On a donc le tableau :

x	− õ	−7/2	2	+ õ
$2x^2+3x-14$	**+**	**−**	**+**	
Positions	$\mathscr{P}$ au dessus de $\mathscr{P}$'	$\mathscr{P}$ en dessous de $\mathscr{P}$'	$\mathscr{P}$ au dessus de $\mathscr{P}$'	

Ainsi, la parabole $\mathscr{P}$ est au-dessus de la parabole $\mathscr{P}'$ sur les intervalles $\left]-\infty ; -\frac{7}{2}\right[$ et sur $]2 ; +\infty[$ et la parabole $\mathscr{P}$ est en dessous de la parabole $\mathscr{P}'$ sur l'intervalle $\left]-\frac{7}{2} ; 2\right[$

2. Coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec les axes du repère.

• Avec l'axe des ordonnées :

Lorsque x=0, 0²+4×0−12=−12. **Le point d'intersection de la parabole P avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées (0 ; −12).**

• <u>Avec l'axe des abscisses</u> :

On résout $x^2+4x-12=0$:

$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times1\times(-12) = 16+48 = 64 > 0$ donc l′ équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{64}}{2\times1} = \frac{-4-8}{2} = -6 \quad et \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+8}{2} = 2$$

Les points d'intersection de la parabole P avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées (−6 ; 0) et (2 ; 0).

3. D'après la question précédente, 2 et − 6 sont les racines du polynôme et a=1>0. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$y=x^2+4x-12$		+	**0**	–	**0**	+	

Sur les intervalles $]-\infty\,;\,-6[$ et sur $]2\,;\,+\infty[$, $x^2+4x-12>0$ donc la parabole P est au-dessus de l'axe des abscisses sur ces intervalles.

Sur l'intervalle $]-6\,;2[$, $x^2+4x-12<0$ donc la parabole P est en dessous de l'axe des abscisses sur cet intervalle.

<u>Exercice 3</u>:

1. Pour tout réel x, $f(x) = x^2-5x+\frac{25}{2}$

$a = 1 > 0$ donc f est décroissante puis croissante.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2\times1} = \frac{5}{2} \quad et \quad \beta = f(\alpha) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\times\frac{5}{2}+\frac{25}{2} = \frac{25}{4}-\frac{25}{2}+\frac{25}{2} = \frac{25}{4} = 6{,}25$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	− õ		5/2		+ õ
$f(x)$		↘	6,25	↗	

2.

a. **L′ ensemble de définition de *S* est [0 ; 5]** car x est compris entre 0 et 5.

b. $S(x)$=aire du triangle ABC − aire du rectangle $AHMK$.

Aire de ABC $=5\times\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$ et Aire de $AHMK$ $=\frac{x\times AK}{2}$

Calculons AK : d′ après le th de Thalès, on a $\frac{CK}{CA}=\frac{MK}{AB}$, c'est-à-dire $CK=\frac{MK\times CA}{AB}=\frac{x\times5}{5}=x$ et donc $AK=5-x$.

Ainsi l′ aire de $AHMK$ est $x(5-x)=5x-x^2$.

Alors, **pour tout x de [0 ; 5], $S(x)=\frac{25}{2}-(5x-x^2)=x^2-5x+\frac{25}{2}$.**

c. On constate que $S(x)=f(x)$ pour tout x de [0 ; 5].

D'après la question 1., la fonction S admet un minimum sur [0 ; 5] pour $x=\frac{5}{2}$.

Il faut donc placer le point *H* au milieu du segment [*AB*] pour que l'aire du domaine colorié soit minimale. Dans ce cas, l'aire sera de 6,25 cm².

d. $S(x) \leq \frac{75}{8}$ si et seulement si $x^2-5x+\frac{25}{2}\leq\frac{75}{8}$ si et seulement si $x^2-5x+\frac{25}{8}\leq 0$

$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times1\times\frac{25}{8} = 25-\frac{25}{2} = \frac{25}{2} > 0$

donc le trinôme a deux racines qui sont $x_1 = \frac{10-5\sqrt{2}}{4}$ et $x_2 = \frac{10+5\sqrt{2}}{4}$ et il est du signe de a=1>0 sauf entre ces racines. On a donc le tableau suivant :

x	0		$\frac{10-5\sqrt{2}}{4}$		$\frac{10+5\sqrt{2}}{4}$		5
$x^2-5x+\frac{25}{8}$		+	**0**	–	**0**	+	

Ainsi, sur l'intervalle [0 ; 5], $S(x)$Â $\frac{75}{8}$ a pour ensemble de solutions $\left[\frac{10-5\sqrt{2}}{4}\,;\,\frac{10+5\sqrt{2}}{4}\right]$.