DEVOIR A LA MAISON N°1. TS1.

Pour le

Pensez à utiliser les cours et exercices de 1ère !!!

Posez des questions si vous êtes bloqués !!!

I. La loi de refroidissement de Newton stipule que l'évolution de la température d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius est de 10°C.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement de ce café en appliquant la loi de Newton suivant un modèle.
Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $\boldsymbol{T_0=80}$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :
$\boldsymbol{T_{n+1}-T_n=-0{,}2(T_n-10)}$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{T_{n+1}=0{,}8T_n+2}$. **Vous pouvez utiliser ce résultat dans la suite même si vous n'avez pas réussi à le prouver.**

Les questions suivantes sont des questions à savoir absolument refaire, en les rédigeant correctement !

3. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T > 40
  T ← 0,8T + 2
  n ← n + 1
Fin Tant que
```

   a. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n. Construire la table d'exécution de l'algorithme.
   Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   c. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70\times 0{,}8^n + 10$.
5.
   a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -14\times 0{,}8^n$.
   b. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).

II.

1. f est définie par $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 4$. Construire le tableau de variation de la fonction f après l'avoir dérivée.
2. g est définie par $g(x) = \dfrac{4x-5}{x^2-6x+9}$.
   a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b. Un logiciel de calcul formel affiche :

deriver(g(x))
$\dfrac{-4\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-3)^3}$

   Justifier ce résultat.
   Si vous n'arrivez pas à faire cette question, vous pouvez tout de même faire la suivante !
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction g.

CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N°1. TS1

I.

1. On peut conjecturer que la suite (T_n) est **décroissante** car le café refroidit.
2. Soit n un entier naturel.
   $T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10)$ donc $T_{n+1} = -0{,}2(T_n - 10) + T_n = -0{,}2_n + 2 + T_n = \mathbf{0{,}8\,T_n + 2.}$
3. On considère l'algorithme suivant :

Tant que $T > 40$
$T \leftarrow 0{,}8T + 2$
$n \leftarrow n+1$
Fin Tant que

a. On peut construire la table d'exécution suivante :

T	80	66	54,8	45,84	38,672
n	0	1	2	3	4
$T > 40$?	oui	oui	oui	oui	non

A la fin de l'exécution de l'algorithme, la variable *n* contient 4.

b. **Au bout de 4 minutes, la température du café est inférieure à 40°C.**

4. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.

a. Soit n un entier naturel.

$u_{n+1} = T_{n+1} - 10 = 0{,}8T_n + 2 - 10 = 0{,}8T_n - 8 = 0{,}8(T_n - 10) = 0{,}8u_n$.

On a $u_{n+1} = 0{,}8u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ donc **la suite (u_n) est géométrique de raison 0,8 et de 1^er^ terme $u_0 = T_0 - 10 = 80 - 10 = 70$.**

b. D'après le cours, la suite (u_n) étant géométrique, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$, c'est-à-dire $\mathbf{u_n = 70 \times 0{,}8^n}$**.**

c. Soit n un entier naturel. On a $u_n = T_n - 10$ donc $\mathbf{T_n = u_n + 10 = 70 \times 0{,}8^n + 10.}$

5.

a. Soit n un entier naturel.

$T_{n+1} - T_n = (70 \times 0{,}8^{n+1} + 10) - (70 \times 0{,}8^n + 10) = 70 \times 0{,}8^{n+1} + 10 - 70 \times 0{,}8^n - 10$

$T_{n+1} - T_n = 70 \times 0{,}8^{n+1} - 0 \times 0{,}8^n = 70 \times 0{,}8^n(0{,}8 - 1)$ car $0{,}8^{n+1} = 0{,}8^n \times 0{,}8$

$T_{n+1} - T_n = 70 \times 0{,}8^n \times (-0{,}2) = \mathbf{-14 \times 0{,}8^n}$

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $-14 \times 0{,}8^n < 0$, c'est-à-dire $T_{n+1} - T_n < 0$.

La suite (T_n) est donc décroissante.

II.

1. f est définie par $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 4$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a $f'(x) = -3x^2 + 3x + 6$.
On cherche le signe de $-3x^2 + 3x + 6$: $\Delta = 81$ donc le trinôme a deux racines qui sont $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$ et il est du signe de $a = -3 < 0$ sauf entre ces racines.
On peut alors construire le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
variations de f		$\searrow$	$-7{,}5$	$\nearrow$	6	$\searrow$	

2. g est définie par $g(x) = \dfrac{4x-5}{x^2 - 6x + 9}$ (penser aux valeurs interdites !)

a. On cherche les valeurs interdites :

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

b. Pour tout réel x différent de 3, on a $g'(x)=\dfrac{4(x^2-6x+9)-(4x-5)(2x-6)}{(x^2-6x-9)^2}$

$g'(x)=\dfrac{-4x^2+10x+6}{(x^2-6x+9)^2}=\dfrac{-4x^2+10x+6}{(x-3)^4}$

<u>*Factorisation de $-4x^2+10x+6$:*</u> $\Delta=196$ donc le trinôme a deux racines qui sont $x_1=3$ et $x_2=-\dfrac{1}{2}$.

On a alors, pour tout réel x, $-4x^2+10x+6=-4(x-3)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

Ainsi, pour tout x différent de 3, $\boldsymbol{g'(x)=}\dfrac{-4(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-3)^4}\boldsymbol{=\dfrac{-4\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-3)^3}}$

c. On peut alors construire le tableau de signes et de variations suivant :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$-1/2$		3		$+\infty$
signe de $-$ 4		$-$		$-$		$-$	
signe de $\boldsymbol{x+1/2}$		$-$		$+$		$+$	
signe de $\boldsymbol{(x-3)^3}$		$-$		$-$		$+$	
signe de $\boldsymbol{f\ '(x)}$		$-$		$+$		$-$	
variations de *f*		$\searrow$	$-4/7$	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	