

FONCTIONS : EXERCICE AVEC UNE FONCTION AUXILIAIRE.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^5 - 10x^3 - 15x^2 + 1$ et g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

A.
Tracer la courbe de f à la calculatrice. Quel semble être le tableau de variation de la fonction f ?

- B.**
1. Construire le tableau de variation de la fonction g .
 2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 3]$ puis que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans \mathbb{R} .
 3. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
 4. Donner le tableau de signes de $g(x)$.

- C.**
1. Déterminer $f'(x)$.
 2. Construire le tableau de variation de f .

D.
Avec le logiciel *Xcas*, on vérifie l'expression trouvée pour $g'(x)$, la valeur approchée de α et l'expression de $f'(x)$.

**FONCTIONS : EXERCICE
AVEC UNE FONCTION AUXILIAIRE.
CORRECTION**

B.

1. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , on a $g'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$.
 $g'(x)$ est un trinôme qui a pour racines -1 et 1 et est positif sauf entre ces racines. On a donc :

x	$-\infty$	-1	1	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$g(x)$					

2. Sur $[2 ; 3]$, la fonction g est strictement croissante et continue, avec $g(2)=-1 < 0$ et $g(3) = 15 > 0$ donc l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α dans $[2 ; 3]$.

Sur $]-\infty ; 2]$, le maximum de g est -1 donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution dans $]-\infty ; 2]$.

Sur $[3 ; +\infty[$, le minimum de g est 15 donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution dans $[3 ; +\infty[$.

Ainsi, **l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α dans \mathbb{R} .**

A la calculatrice, on obtient **$2,10 < \alpha < 2,11$.**

3. Du tableau de variation, on déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$+$	$+$

C.

1. f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x , on a $f'(x) = 10x^4 - 30x^2 - 30x = 10x(x^3 - 3x - 3) = 10xg(x)$

2. **On utilise le tableau de signes de $g(x)$.**

On a alors le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$10x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$				