PROBLÈMES ET ÉQUATIONS
EXERCICES

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

I. Après avoir dépensé le tiers de son argent de poche, puis le quart de ce qui lui restait, Luc possède encore 40€. Combien avait-il d'argent de poche ?

II. Un père a 27 ans et son fils en a 3. Dans combien d'années l'âge du fils sera-t-il égal au quart de celui de son père ?

III. Marc et Louise, qui habitent le même immeuble, quittent leur bâtiment et suivent exactement la même route pour se rendre au lycée situé à 5km et auquel ils doivent arriver à 8h.
Marc, le piéton, part à 7h et marche à une vitesse de 5 $km.h^{-1}$.
Louise part à 7h30 et roule à scooter à la vitesse de 25$km.h^{-1}$.
A quelle heure Louise rejoindra-t-elle Marc ?

IV. Lucas a acheté 4BD, toutes au même prix. Il lui reste 7,90€. Si chaque BD avait coûté 1€ de moins, il aurait pu en acheter exactement 5. Quel était le montant des économies de Lucas avant cet achat ?

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

V. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 3x+y=5 \\ 5x+2y=1 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} x+2y=6 \\ x-2y=-2 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-2y=3 \end{cases}$$

VI. Un groupe de 40 personnes s'est inscrit pour une visite guidée en bus de Paris. Les adultes paient 9€ et les enfants 5€. Le responsable du groupe a remis 312€ à l'organisateur du circuit. Combien y a-t-il d'adultes et d'enfants dans ce groupe ?

VII. $ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 12$ et $AB = 8$. E est le milieu de $[AD]$. les droites (BE) et (AC) se coupent en F. G est le pied de la hauteur issue de F dans le triangle AEF et H est le pied de la hauteur issue de F dans le triangle FDC. On pose $x = FH$ et $y = FG$.

1. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle CAD puis dans le triangle EAB, écrire deux équations d'inconnues x et y.
2. Résoudre le système obtenu à la question 1 et en déduire FH et FG.

VIII. Au championnat de France de football, une équipe qui gagne un match empoche 3 points, un match nul rapporte 1 point et un match perdu ne rapporte rien.
Après la 16ème journée, un club qui a remporté deux fois plus de victoires que de défaites possède 28 points. Combien de matchs ce club a-t-il perdu ?

IX. Un marchand de glaces, heureux propriétaire d'un perroquet, vend des glaces à la vanille au prix unitaire de 0,50€ et des glaces au chocolat 0,75€. À la fin de la journée, s'adressant à son volatile, il affirme : "J'ai gagné 63€75. Si j'avais vendu les glaces à la vanille 0,75€ et les glaces au chocolat 0,50€, j'aurais gagné 60€ de plus." "Impossible !" lui répond le perroquet. Qu'en pensez-vous ?

X. Un rectangle a pour longueur L. L'aire d'un carré de côté L est le quadruple de l'aire du rectangle. La différence des périmètres du carré de côté L et du rectangle est 500m. Quelles sont les dimensions du rectangle ?

ÉQUATIONS PRODUIT NUL

XI.

1. Développer $(x-3)(x+1)$.

2. Déterminer tous les triplets de trois nombres entiers consécutifs qui sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

XII. Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2=5$

2. $(x^2+2x+1)=(x+1)(3x+4)$

3. Résoudre $9x^2+6x+1=0$ puis résoudre $9x^2+6x-15=0$.

PROBLÈMES ET ÉQUATIONS
EXERCICES
CORRECTION

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

I. Soit x le montant de l'argent de poche de Luc au départ.

$x-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}x=40 \Leftrightarrow x-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{6}x=40 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x=40 \Leftrightarrow x=80$. **Luc avait au départ 80€.**

II. Soit x le nombre d'années cherché.

Dans x années, le père aura $27+x$ ans et le fils aura $3+x$ ans.

$3+x=\dfrac{1}{4}(27+x) \Leftrightarrow x-\dfrac{1}{4}x=\dfrac{27}{4}-3 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}x=\dfrac{15}{4} \Leftrightarrow 3x=15 \Leftrightarrow x=5$. **L'âge du fils sera égal au quart de celui de son père dans 5 ans.**

III. Soit t le temps, en heures, écoulé depuis 7h lorsque Louise rejoint Marc.

$t>0{,}5$ car Louise part à 7h30.

Marc aura alors parcouru $5t$ km et Louise aura parcouru $25(t-0{,}5)$ km.

Marc et Louise seront au même endroit donc $5t=25(t-0{,}5)$

$5t=25(t-0{,}5) \Leftrightarrow 5t=25t-12{,}5 \Leftrightarrow 12{,}5=20t \Leftrightarrow \dfrac{12{,}5}{20}=t \Leftrightarrow t=0{,}625$

$0{,}625h=0{,}625\times60min=37{,}5min=37min30s$.

Louise rejoindra Marc à 7h37minutes et 30secondes.

IV. Soit x le prix d'une BD.

Le montant des économies de Lucas est $4x+7{,}90$.

Si chaque BD avait coûté $x-1$€, il en aurait acheté 5. Le montant de ses économies est donc $5(x-1)$

On a alors l'équation (E) : $4x+7{,}90=5(x-1)$

$(E) \Leftrightarrow 4x+7{,}9=5x-5 \Leftrightarrow 12{,}9=x$. Une BD coûte 12€90.

$4\times12{,}9+7{,}9=59{,}5$.

Lucas avait 59€50.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

V. Résoudre les systèmes suivants :

(S_1) : $\begin{cases}3x+y=5\\5x+2y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-5\\5x+2(3x-5)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-5\\11x=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-5\\x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3\times1-5=-2\\x=1\end{cases}$ $\boldsymbol{S=\{(1;-2)\}}$

(S_2): $\begin{cases}x+2y=6\\x-2y=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=6\\2x=4\end{cases}$ (on additionne les équations)

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=6\\x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2+2y=6\\x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\x=2\end{cases}$ $\boldsymbol{S=\{(2;2)\}}$

(S_3): $\begin{cases}2x+3y=5\\5x-2y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+6x=10\\15x-6y=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+6y=10\\19x=19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+6y=10\\x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4+6y=10\\x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\x=1\end{cases}$

$\boldsymbol{S=\{(1;1)\}}$

VI. Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants. On a le système (S): $\begin{cases}x+y=40\\9x+5y=312\end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases}x=40-y\\9(40-y)+5y=312\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=40-y\\360-4y=312\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=40-y\\y=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=40-12=28\\y=12\end{cases}$

Il y a 28 adultes et 12 enfants dans le groupe.

VII. $ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 12$ et $AB = 8$. E est le milieu de $[AD]$. les droites (BE) et (AC) se coupent en F. G est le pied de la hauteur issue de F dans le triangle AEF et H est le pied de la hauteur issue de F dans le triangle FDC. On pose $x = FH$ et $y = FG$.

1. Dans le triangle ACD, on a, d'après le th de Thalès :

$\frac{CH}{CD} = \frac{CF}{CA} = \frac{HF}{DA}$, c'est-à-dire $\frac{8-y}{8} = \frac{CF}{CA} = \frac{x}{12}$. On a donc $\frac{8-y}{8} = \frac{x}{12}$, c'est-à-dire $\mathbf{12(8-y)=8x}$

Dans le triangle EAB, on a, d'après le th de Thalès :

$\frac{EG}{EA} = \frac{EF}{EB} = \frac{GF}{BA}$, c'est-à-dire $\frac{x-6}{6} = \frac{EF}{EB} = \frac{y}{8}$. On a donc $\frac{x-6}{6} = \frac{y}{8}$,c'est-à-dire $\mathbf{8(x-6)=6y}$

2. On a $12(8-y) = 8x$ c'est-à-dire (en simplifiant par 4 et en développant) : $24-3y = 2x$

On a aussi $8(x-6) = 6y$, c'est-à-dire $4x - 24 = 3y$

On a donc le système (S) : $\begin{cases} 24-3y = 2x \\ 4x-24 = 3y \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y = 24 \\ 4x-3y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y = 24 \\ 6x = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y = 24 \\ x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\times 8+3y = 24 \\ x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{3} \\ x = 8 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{S=\left\{\left(8;\frac{8}{3}\right)\right\}}$

On a donc $\boldsymbol{FH=8}$ et $\boldsymbol{FG=\frac{8}{3}}$.

VIII. Soit x le nombre de défaites et y le nombre de matchs nuls. Le nombre de victoires est alors $2x$.
Il y a eu 16 journées donc $x+2x+y = 16$, c'est-à-dire $3x+y = 16$.
Le club a 28 points donc $3\times 2x+1\times y = 28$, c'est-à-dire $6x+y = 28$

On a donc le système (S): $\begin{cases} 3x+y = 16 \\ 6x+y = 28 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y = 16 \\ 3x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y = 16 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\times 4+y = 16 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 4 \end{cases}$

Le club a perdu 4 matchs, gagné 8 match et fait 4 matchs nuls.

IX. Soit x le nombre de glaces à la vanille vendues et y le nombre de glaces au chocolat vendues.

On a le système (S) : $\begin{cases} 0{,}5x+0{,}75y = 63{,}75 \\ 0{,}75x+0{,}5y = 63{,}75+60 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y = 255 \\ 3x+2y = 495 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y = 510 \\ 9x+6y = 1485 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y = 510 \\ 5x = 975 \end{cases}$ (on soustrait les équations)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y = 510 \\ x = 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\times 195+6y = 510 \\ x = 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -45 \\ x = 195 \end{cases}$

Pour que l'affirmation soit vraie, le marchand aurait dû vendre 195 glaces à la vanille et -45 glaces au chocolat, ce qui est impossible.

X. Soit l la largeur du rectangle et L sa longueur.
L'aire d'un carré de côté L est L^2 et l'aire du rectangle est Ll. On a donc $L^2 = 4Ll$, soit $L = 4l$ car $L \neq 0$.
Le périmètre du carré de côté L est $4L$ et celui du rectangle est $2L+2l$. On a donc $4L = 2L+2l+500$

On a alors le système (S): $\begin{cases} L = 4l \\ 4L = 2L+2l+500 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} L = 4l \\ 16l = 8l+2l+500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 4l \\ l = \frac{250}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = \frac{1000}{3} \\ l = \frac{250}{3} \end{cases}$

Les dimensions du rectangle sont $\boldsymbol{\frac{100}{3}}$ et $\boldsymbol{\frac{250}{3}}$.

ÉQUATIONS PRODUIT NUL

XI.

1. $(x-3)(x+1) = x^2-3x+x-3 = \mathbf{x^2-2x-3}$

2. Soit x le plus petit des trois nombres cherchés. Les autres sont $x+1$ et $x+2$.

Soit un triangle de côtés x, $x+2$ et $x+3$.

D'après le th de Pythagore le triangle est rectangle si et seulement si $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$.

$(E) \Leftrightarrow x^2+x^2+2x+1=x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0$ d'après la question 1

$\Leftrightarrow x-3=0$ ou $x+1=0$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=-1$

x étant une longueur, le triangle est rectangle ssi $x=3$

Le triangle de côté x, $x+1$ et $x+2$ est rectangle ssi les longueurs de ses côtés sont 3 ; 4 et 5.

XII. Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2=5 \Leftrightarrow x^2-5=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)=0 \Leftrightarrow x-\sqrt{5}=0$ ou $x+\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$

Les solutions sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

2. $(x^2+2x+1)=(x+1)(3x+4) \Leftrightarrow x^2+2x+1-(x+1)(3x+4)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2-(x+1)(3x+4)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)[(x+1)-(3x+4)]=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(-2x-3)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)=0$ ou $(-2x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=-\dfrac{3}{2}$

Les solutions sont -1 et $-\dfrac{3}{2}$

3. $9x^2+6x+1=0 \Leftrightarrow (3x+1)^2=0 \Leftrightarrow 3x+1=0 \Leftrightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{3}$ **La solution est $\dfrac{-1}{3}$**

$9x^2+6x-15=0 \Leftrightarrow 9x^2+6x+1-16=0 \Leftrightarrow (3x+1)^2-4^2=0$

$\Leftrightarrow (3x+1-4)(3x+1+4)=0$

$\Leftrightarrow (3x-3)(3x+5)=0$

$\Leftrightarrow 3x-3=0$ ou $3x+5=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-\dfrac{5}{3}$

Les solutions sont 1 et $-\dfrac{5}{3}$