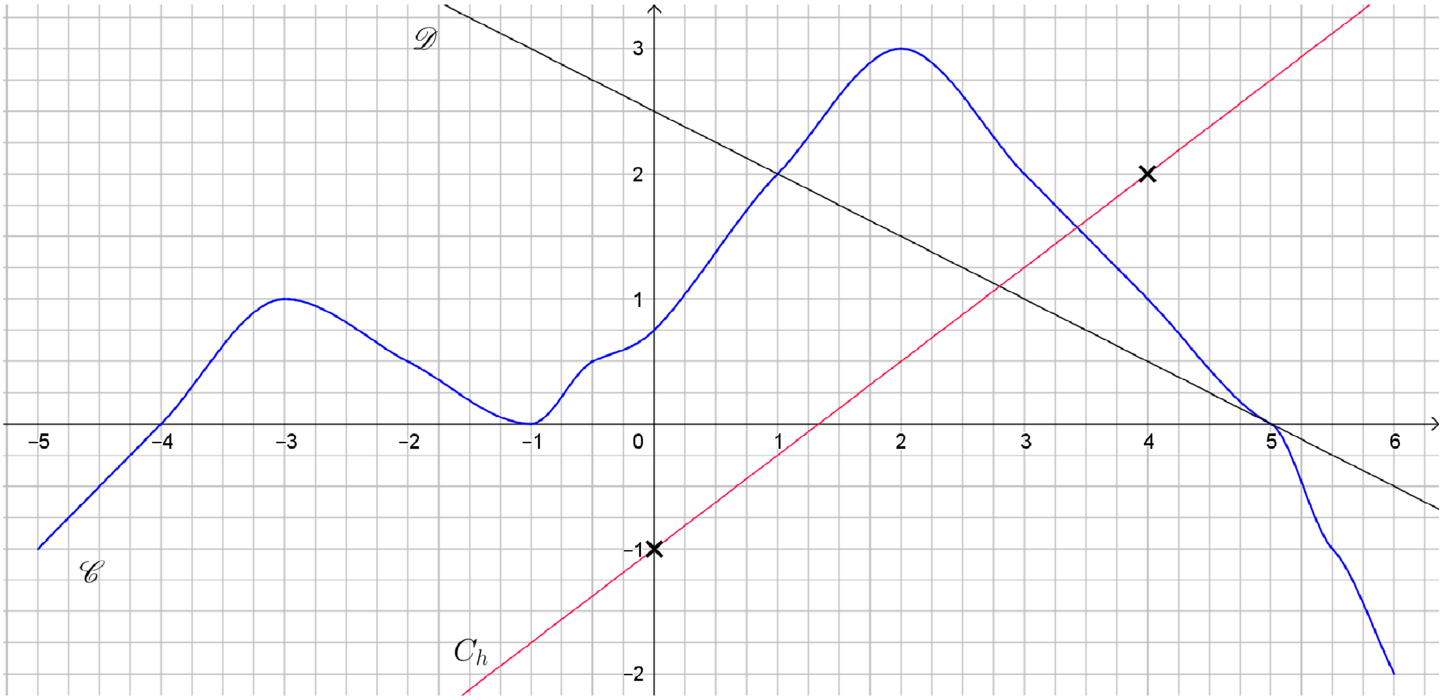
CORRECTION DU DEVOIR COMMUN MAI 2018

Exercice 1 : On a représenté dans le repère ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction g.



A l'aide du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ? $D_f = [-5; 6]$
2) Déterminer l'image de -2 par la fonction f : **L'image de -2 par f est $f(-2) = 0,5$**
3) Déterminer $f(1)$: $f(1) = 2$
4) Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 : **Les antécédents de 0 par f sont : -4; -1 et 5**
5) Déterminer la ou les solution(s) de l'équation $f(x) = -1$: **Les solutions de l'équation sont -5 et $5,5$**
6) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$: $S = \emptyset$.
7) Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$: $S = [-5; -4[\cup]5; 6]$
8) Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$: $S = [1\ ;\ 5]$
9) Quel est le maximum de f sur l'intervalle $[-5; 0]$? **Le maximum de f sur $[-5; 0]$ est 1.**

10) Dresser le tableau de variations ci-dessous de la fonction f sur son ensemble de définition :

x	-5		-3		-1		2		6
variations de f	-1	↗	1	↘	0	↗	3	↘	-2

11) Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x : $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ **ou bien** $g(x) = -0,5x + 2,5$

12) Soit la h fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{3}{4}x - 1$.

a) De quel type est la fonction (affine, linéaire, polynôme du second degré, carré, ...)

h est une fonction affine.

b) Représenter dans le repère ci-dessus.

Droite C_h en rouge dans le repère

Exercice 2:

PARTIE A : Les toupies sont les derniers jouets à la mode chez les 4 - 8 ans. Un fabriquant de toupies a fait une enquête auprès de 30 enfants pour savoir combien ils avaient de toupies chez eux. Il a obtenu les résultats suivants :

Nombres de toupies	0	1	2	3	4	5
Effectifs	3	4	8	5	4	6
Effectifs cumulés croissants	**3**	**7**	**15**	**20**	**24**	**30**

Toutes les questions portent sur ces données.

Pour chaque réponse, on pensera à détailler les calculs.

1. Calculer la moyenne de cette série statistique.

$$\bar{x} = \frac{0 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 8 + 3 \times 5 + 4 \times 4 + 5 \times 6}{30} = \frac{81}{30} = 2,7$$

2. Compléter, sans justifier, la ligne des effectifs cumulés croissants.
3. Calculer la fréquence des enfants ayant au plus 3 toupies.

$$f = \frac{20}{30} \approx 0,67$$

4. Calculer la médiane de cette série statistique.

L'effectif total est pair (N = 30).

$$\frac{N}{2} = 15 \text{ donc la médiane est la moyenne entre la } 15^{\text{ème}} \text{ et la } 16^{\text{ème}} \text{ valeur de la série}$$

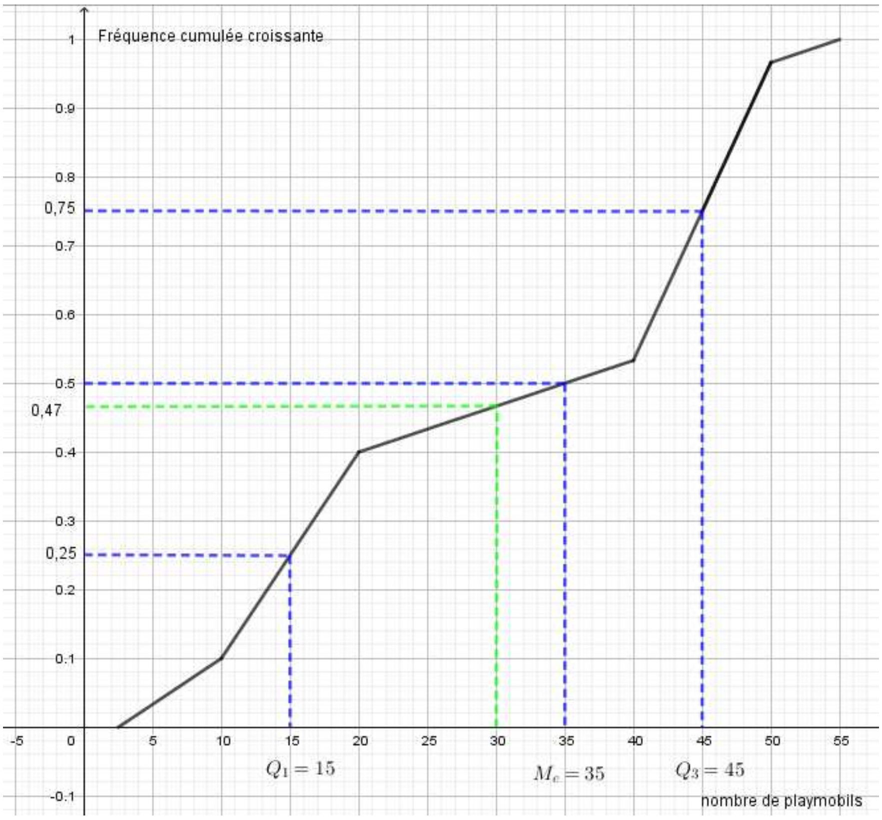
La $15^{\text{ème}}$ valeur de la série est 2 et la $16^{\text{ème}}$ valeur de la série est 3. Donc la médiane est 2,5.

5. Calculer le premier et le troisième quartile de cette série statistique.

$$\frac{N}{4} = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ donc } Q_1 \text{ est la } 8^{\text{ème}} \text{ valeur, } Q_1 = 2$$

$$\frac{3 \times N}{4} = \frac{3 \times 30}{4} = 22,5 \text{ donc } Q_3 \text{ est la } 23^{\text{ème}} \text{ valeur, } Q_3 = 4$$

PARTIE B : Le même fabricant a fait une enquête auprès de 250 enfants pour savoir combien ils avaient de Playmobils chez eux. Il a ensuite construit le polygone des effectifs cumulés croissants**.** Voici ce polygone :



1. Déterminer graphiquement la médiane et les quartiles de la série. Laisser les traits de lecture apparents.

$Me \approx 35$; $Q_1 \approx 15$ et $Q_3 \approx 45$

2. Interpréter la médiane par une phrase.

Au moins la moitié des enfants interrogés ont au plus 35 playmobils.

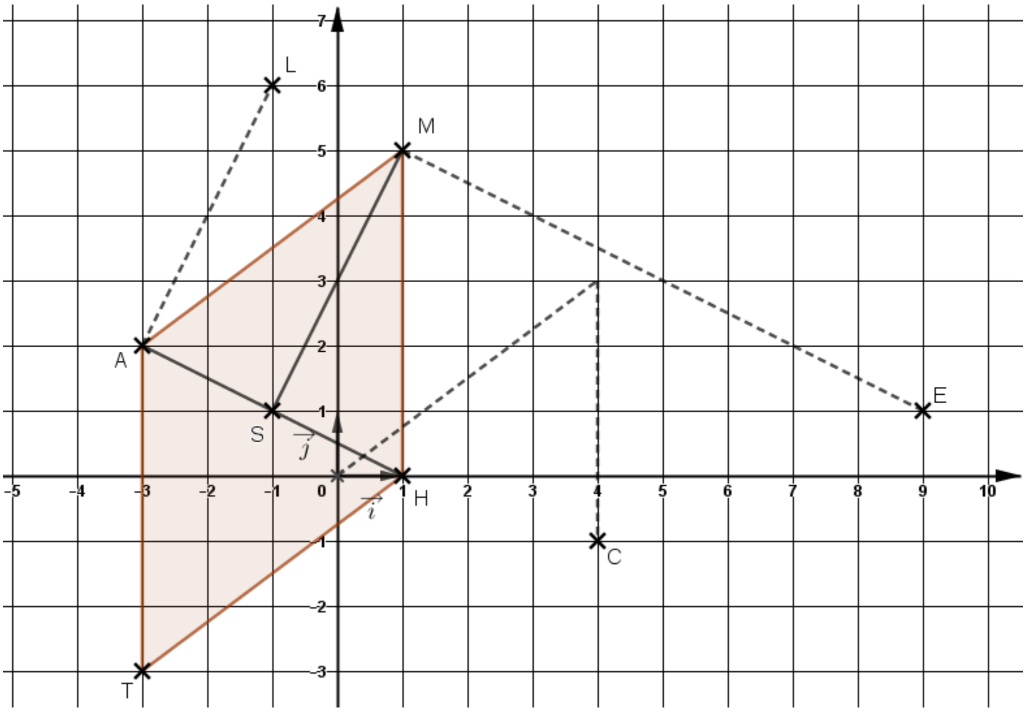
3. Déterminer la fréquence des enfants ayant plus de 30 Playmobils.

D'après le graphique, 47% des enfants interrogés ont au plus 30 playmobils. Il y en a donc 53% qui ont plus de 30 playmobils. La fréquence des enfants ayant plus de 30 playmobils est 0,53.

Exercice 3 : On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points :

$$A(-3;2)\ ,\ M(1;5)\ et\ \ H(1;0).$$

1) Placer les points A ; M et H dans le repère ci-dessous :



2) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x_A - x_M\\ y_A - y_M\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-3-1\\ 2-5\end{pmatrix}\ \ donc \qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-4\\ -3\end{pmatrix}$$

3) a) Placer le point T tel que le quadrilatère MATH soit un parallélogramme.
b) Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point T en justifiant soigneusement votre réponse.

Soit $T(x;y)$ alors $\overrightarrow{HT}\begin{pmatrix}1-x\\ -y\end{pmatrix}$ on a aussi $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-4\\ -3\end{pmatrix}$

MATH est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{HT}$

si et seulement si $\begin{cases}x - 1 = -4\\ y = -3\end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases}x = -3\\ y = -3\end{cases}$

Donc $T(-3;\ -3)$

4) Calculer les coordonnées du milieu S du segment [AH].

S est le milieu du segment [AH] donc

$$x_S = \frac{x_A + x_H}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad et \quad y_S = \frac{y_A + y_H}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$$

Donc $S(-1;1)$

5) On admet que $AS = \sqrt{5}$.

a) Montrer que le triangle ASM est un triangle rectangle.

$$SM = \sqrt{(x_M - x_S)^2 + (y_M - y_S)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$AM = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

<u>On sait que</u> : dans le triangle ASM, le plus grand côté est [AM].

D'une part : $AM^2 = 5^2 = 25$

D'autre part : $AS^2 + SM^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{20}^2$
$= 5 + 20 = 25$

<u>On constate que</u> : $AM^2 = AS^2 + SM^2$

<u>Donc</u> d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ASM est rectangle en S.

b) En déduire la nature du quadrilatère MATH. Justifier votre réponse.

On sait que : Le quadrilatère MATH est un parallélogramme
S est le milieu de la diagonale [AH].
Or : Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.
Donc S est aussi le milieu de la diagonale [MT].
Par suite, on peut en déduire que les droites (MT) et (AH) sont perpendiculaires.

On sait que : Le quadrilatère MATH est un parallélogramme.
Les droites (MS) et (AH) sont perpendiculaires.
Or si un parallélogramme a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement alors c'est un losange.
Donc MATH est un losange.

6) a) Placer dans le repère ci-dessus, les points C, L et E tels que :

$$\overrightarrow{SL} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{MS} \qquad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AM} + \frac{4}{5}\overrightarrow{MH} \qquad \overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{HA}$$

b) Déterminer, par lecture graphique, les coordonnées des points C, L et E.

$$\boldsymbol{C(4\,;\,-1)} \quad \boldsymbol{L(-1\,;\,6)} \quad \boldsymbol{et} \quad \boldsymbol{E(9\,;1)}$$

7) On admet que : $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

Les points A, H et C sont-ils alignés ? Justifier soigneusement votre réponse.

On a : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}1-(-3)\\0-2\end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} x \times y' &= 1 \times 1 = 4 \\ x' \times y &= -3 \times (-2) = 6 \end{aligned}\right\} \quad 4 \neq 6$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ *et* $\overrightarrow{CH}$ ne sont pas colinéaires.
Conclusion: Les points A, H et C ne sont pas alignés.

8) a) Montrer que $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{SA}$ puis en déduire que $\overrightarrow{ME} = -4\overrightarrow{ML}$*

b) Que peut-on en déduire pour les points M, E et L?

1ère méthode : En utilisant la relation de Chasles :

$a)$ $\quad \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SL} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{SA}$

$$\overrightarrow{ME} = -\overrightarrow{EM} = -2\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{AH} = 2 \times 2\overrightarrow{AS} \quad (car\ S\ est\ le\ milieu\ de\ [AH] donc\ \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AS})$$

Donc $\overrightarrow{ME} = 4\,\overrightarrow{AS} = -4\,\overrightarrow{SA} = -4\overrightarrow{ML}$

2ème méthode : En calculant les coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-1-1\\6-5\end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}-3+1\\2-1\end{pmatrix}$ *d'où* $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ **Donc** $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{SA}$.

$\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix}9-1\\1-5\end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ *de plus* $-4\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-4\times(-2)\\-4\times 1\end{pmatrix}$ *d'où* $-4\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ **Donc** $\overrightarrow{ME} = -4\overrightarrow{ML}$

b) On a montré que $\overrightarrow{ME} = -4\overrightarrow{ML}$, on en déduit donc que les vecteurs $\overrightarrow{ME}$ *et* $\overrightarrow{ML}$ sont colinéaires
Conclusion : Les points M, E et L sont alignés.

<u>Exercice 4</u> : Un artisan bijoutier fabrique des parures (une bague, un collier et des boucles d'oreilles). Afin de lancer la nouvelle collection, il offre un bon d'achat de 10 € aux clients. Chaque parure est vendue 210 €. Pour la fabrication de x parures, les coûts de fabrication, en euros, sont donnés par la fonction C définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$C(x) = 50x^2 - 790x + 3740$$

1. a) De quel type est la fonction C ? (affine, linéaire, polynôme du second degré, carré, ...)

   La fonction C est une fonction polynôme du second degré.

   b) On propose trois représentations graphique pour la fonction C.

   C est une fonction polynôme du second degré, sa représentation graphique est donc une parabole : graphique N°2 ou bien graphique N°3.
   De plus, $a = 50 > 0$ donc la fonction est décroissante puis croissante.
   C'est donc le graphique N°2.

2. a) Dresser le tableau de variations de la fonction B sur $[0\ ;+\infty[$.

$$\propto = -\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2\times(-50)} = 10$$

$$\beta = B(\propto) = B(10) = -50 \times 10^2 + 1000 \times 10 - 3750 = 1250$$

$$a = -50 < 0$$

Donc la fonction B est croissante sur $[0\ ;10]$ puis décroissante sur $[10;\ +\infty[$. D'où :

x	0	10	$+\infty$
Variations de B	-3750 ↗	1250	↘

   b) Montrer que $B(x) = (-50x + 250)(x - 15)$ pour tout réel x positif.

$$(-50x + 250)(x - 15) = -50x \times x + 50x \times 15 + 250 \times x - 250 \times 15$$
$$= -50x^2 + 750x + 250x - 3750$$
$$= -50x^2 + 1\,000x - 3750 = B(x)$$

   b) Résoudre $B(x) = 0$. Interpréter.

   Résoudre $B(x) = 0$ revient à résoudre $(-50x + 250)(x - 15) = 0$
   Or un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul
   Donc $(-50x + 250)(x - 15) = 0$ si et seulement si $(-50x + 250) = 0$ *ou* $(x - 15) = 0$
   si et seulement si $-50x = -250$ *ou* $x = 15$
   si et seulement si $x = \frac{-250}{-50} = 5$ *ou* $x = 15$

   Donc $B(x) = 0$ *si* $x \in \{5; 15\}$;
   Pour 5 et 15 parures produites et vendues, le fabriquant réalisera un bénéfice nul.

   c) Résoudre dans IR, $(-50x + 250)(x - 15) > 0$.

x	$-\infty$	5	15	$+\infty$
$-50x+250$	+	0 −	⋮	−
$x-15$	−	⋮ −	0	+
$(-50x+250)(x-15)$	−	0 +	0	−

$S =]5; 15[$

d) Combien de parures doit produire et vendre le bijoutier pour réaliser un bénéfice maximal ? De combien est ce bénéfice maximal ?

D'après la question 2b), le bijoutier doit produire et vendre 10 parures pour réaliser un bénéfice maximum. Ce bénéfice maximum est de 1250€.

f) Pour combien de pièces produites l'artisan obtient-il un bénéfice positif ou nul ?

D'après la question 2f), $B(x) \geq 0 lorsque\ x \in [5\,;15]$
Le bénéfice est donc positif ou nul lorsque le bijoutier vend entre 5 et 15 parures.

3) Montrer que le bénéfice, en euros, réalisé pour *x* parures produites et vendues est :

$$B(x) = -50x^2 + 1\,000x - 3750.$$

La recette pour x parures vendues est $R(x) = 210x - 10$

Donc $B(x) = R(x) - C(x) = 210x - 10 - \left(50x^2 - 790x + 3740\right) = 210x - 10 - 50x^2 + 790x - 3740$

Donc $B(x) = -50x^2 + 1\,000x - 3750.$

Exercice 5 :

1) Résoudre $\begin{cases} 5x - y = -4 \\ 6x - y = 2 \end{cases}$

2)

$$\begin{cases} 5x - y = -4 \\ 6x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4 = y \\ 6x - (5x + 4) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x + 4 \\ 6x - 5x - 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x + 4 \\ x = 2 + 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \times 6 + 4 = 34 \\ x = 6 \end{cases}$$

La solution du système est le couple $(6\,;34)$

3) Un groupe de personnes a réservé dans un restaurant. Toutes les tables sont identiques. Si les personnes sont réparties sur 5 tables, il reste 4 personnes non placées. Si les personnes sont réparties sur 6 tables, 2 places sont inoccupées. Déterminer le nombre de places à chaque table et le nombre de personnes du groupe.

Soit *x* le nombre de places à chaque table et *y* le nombre de personnes dans le groupe.
Si les personnes sont réparties sur 5 tables, il reste 4 personnes non placées donc $5x + 4 = y$
Si les personnes sont réparties sur 6 tables, 2 places sont inoccupées donc $6x - 2 = y$
Les nombres x et y sont donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 4 = y \\ 6x - 2 = y \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système : $\begin{cases} 5x = y - 4 \\ 6x = y + 2 \end{cases}$ **soit** $\begin{cases} 5x - y = -4 \\ 6x - y = 2 \end{cases}$

Donc d'après la question 1, on a : $x = 6\ et\ y = 34$

<u>Conclusion</u> : Le groupe est composé de 34 personnes et il y a 6 places par table dans ce restaurant.

Exercice 6 : On considère un groupe d'adultes, formé de 45% d'hommes. On sait que la proportion de bricoleurs réguliers parmi les hommes de cette population est de 30%, et parmi les femmes, de 12%.

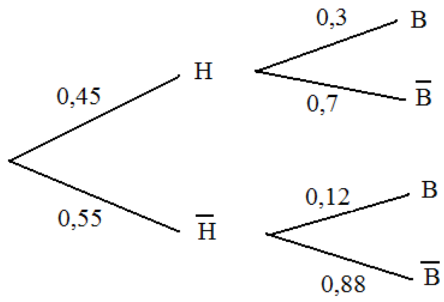
On choisit au hasard une personne du groupe et on définit les événements suivants :

H : "la personne choisie est un homme" et B : "la personne choisie bricole régulièrement".

1. Définir par une phrase l'événement $\overline{H}$.

La personne choisie n'est pas un homme.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.



3. Définir par une phrase l'événement $H \cap B$ puis calculer sa probabilité.

$H \cap B$: **« La personne choisie est un homme qui bricole régulièrement »**

$$P(H \cap B) = 0,45 \times 0,3 = 0,135$$

4. Calculer la probabilité de l'événement B.

$$P(B) = P(H \cap B) + P(\overline{H} \cap B) = 0,45 \times 0,3 + 0,55 \times 0,12 = 0,135 + 0,066 = 0,201$$

5. Définir par une phrase l'événement $H \cup B$ puis calculer sa probabilité.

$H \cup B$: **« La personne choisie est un homme ou bien une personne qui bricole régulièrement »**

$$P(H \cup B) = P(H) + P(B) - P(H \cap B) = 0,45 + 0,201 - 0,135 = 0,516$$

6. On sait que 10,5% des membres de ce groupe aiment lire et que 15% des femmes de ce groupe aiment lire. A l'aide d'un nouvel arbre pondéré, déterminer la proportion des hommes qui aiment lire dans ce groupe.

L : « La personne choisie aime lire . Donc $P(L) = \frac{10,5}{100} = 0,105$

$$P(L) = P(L \cap H) + P(L \cap \overline{H})$$

$$0,105 = 0,45 \times x + 0,55 \times 0,15 = 0,45x + 0,0825$$

$$0,45x = 0,105 - 0,0825 = 0,0225$$

$$x = \frac{0,0225}{0,45} = 0,05 = \frac{5}{100}$$