NOMBRES COMPLEXES
TYPE BAC

I. Nouvelle Calédonie novembre 2016.

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal

Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$.

- ***a.*** Déterminer la forme exponentielle de a.
- ***b.*** Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

3. Soit M un point d'affixe z du cercle C de centre O et de rayon 1.

- ***a.*** Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.
- ***b.*** Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.

4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel

II. Centres étrangers juin 2014.

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par : $\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$, pour tout entier naturel n.

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1.

- ***a.*** Calculer z_1, z_2 et z_3.
- ***b.*** Placer les points A_1 et A_2 dans le plan.
- ***c.*** Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
- ***d.*** Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc. Ainsi $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n$.

3.

- ***a.*** Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.
- ***b.*** Donner une expression de L_n en fonction de n.
- ***c.*** Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

III. D'après Polynésie septembre 2015.

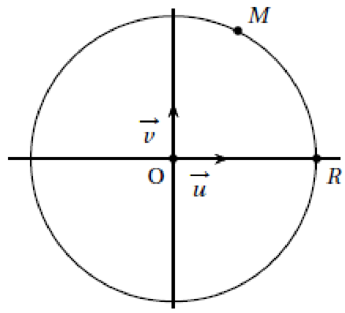
1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - i$.

2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $e^{i\theta}(1-i)$.

3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ, $\cos(\theta)+\sin(\theta) = \sqrt{2}\ cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$..

IV. Antilles Guyane juin 2015.

Partie A



On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $[O\,;\,\vec{u})$

1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.

2. Soit le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right)$.

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'. Justifier la construction.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?

2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?

3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.

a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?

b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

V. Antilles Guyane juin 2016.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct[3]

On note C l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2| = 1$.

1. Justifier que C est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

2. Soit a un nombre réel. On appelle D la droite d'équation $y = ax$. Déterminer le nombre de points d'intersection entre C et D en fonction des valeurs du réel a.