CONTINUITE, DERIVABILITE.
EXERCICES.

Exercice 1.

f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont voici le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2

On sait de plus que les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont -1 et 3.
Construire le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

f est une fonction définie et dérivable sur son ensemble de définition. On donne le tableau de variation de $f\ '$:

x	$-\infty$		2		1		6		$+\infty$
$f\ '(x)$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On sait de plus que :

Les solutions de l'équation $f\ '(x)=0$ sont 2 et 9 ; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=3$; $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=-\infty$; $f(2)=-3$ et $f(12)=0$.

Construire le tableau de signes de $f(x)$.

Exercice 3.

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}{x-1}$.

Exercice 4.

Soit *f* la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormal.

A. Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-3$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Construire le tableau de variation de la fonction g.
3. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Donner le tableau de signes de $g(x)$.

B. Etude de la fonction f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
2. Déterminer les limites de *f* en $-\infty$ et en -1^-.

Pour la suite, on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, *que* $\lim\limits_{x\to-1+} f(x)=-\infty$ *; que* $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ *et que* $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=+\infty$.

3. Construire le tableau de variation de *f*.
4. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$.

Exercice 5.

Soit *f* une fonction définie et continue sur [−10 ; 10] telle que, pour tout *x* de [−10 ; 10], $(f(x))^2=2f(x)$.
Montrer que la fonction *f* est constante sur [−10 ; 10].

Exercice 6.

On donne la courbe de la fonction *f* définie sur [0 ; 2] par $f(x)=x\sqrt{x(2-x)}$.

1. Conjectures.
   - ***a.*** La fonction *f* semble-t-elle continue sur [0 ; 2] ?
   - ***b.*** La fonction *f* semble-t-elle dérivable en 0 ? en 2 ?
2. Justifier que la fonction *f* est continue sur [0 ; 2].
3. Justifier que la fonction *f* est dérivable sur]0 ; 2[.
4. Prouver vos conjectures de la question 1b.
5. Construire le tableau de variation de la fonction *f*.

Exercice 4. CORRECTION

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormal.

A. Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3-3x-3$.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $g'(x) = 3x^2-3 = 3(x-1)(x+1)$.
$g'(x)$ est un trinôme qui a pour racines -1 et 1 et est positif sauf entre ces racines. On a donc :

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$			
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Sur $]-\infty\ ;\ 1]$, le maximum de g est -1 donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty\ ;\ 1]$
Sur $[1\ ;\ +\infty[$, la fonction g est strictement croissante et continue, avec $g(1) = -5 < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
donc l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α.
Ainsi, **l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.**
A la calculatrice, on obtient α $\approx$ **2,10.**

4. Du tableau de variation, on déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$+$	

B. Etude de la fonction f.

1. $x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$. **f est définie sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.**

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} 2x^3+3 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} x^2-1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+} \mathrm{f}(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} \mathrm{f}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1+} \mathrm{f}(x) = +\infty$.

3. f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition.
Pour tout x de D_f, on a $f'(x) = \dfrac{6x^2(x^2-1)-2x\left(2x^3+3\right)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{6x^4-6x^2-4x^4-6x}{(x^2-1)^2} = \boldsymbol{\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}}$

On utilise le tableau de signes de $g(x)$.
On a alors :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$		$-$	$\|$	$-$		$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$	$\|$	$-\infty \nearrow$	-3	$\searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$	

4. On a **$g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha^3-3\alpha-3=0$** ou encore $\alpha^3 = 3\alpha+3$
Alors $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1} = \dfrac{2(3\alpha+3)+3}{\alpha^2-1} = \dfrac{6\alpha+9}{\alpha^2-1} = \boldsymbol{\dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}}$

Exercice 6. Les commentaires sont en vert.
Les questions 2, 3 et 4 sont plus difficiles et moins importantes pour le bac et le contrôle.

1. Conjectures.
   a. **La fonction f semble continue sur [0 ; 2]** (il semble qu'on puisse tracer la courbe sans lever le crayon)
   b. **Graphiquement, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.**
   La courbe de f semble admettre une tangente horizontale au point d'abscisse 0 donc **il semble que f soit dérivable en 0, avec $f'(0)=0$.**
   La courbe de f semble admettre une tangente verticale au point d'abscisse 2 donc **il semble que f ne soit pas dérivable en 2** (en effet, une droite parallèle à l'axe des ordonnes n'a pas de coefficient directeur).

L'étape suivante est donnée dans l'énoncé et n'a donc pas été vérifiée en classe.
Vérifions que f est définie sur [0 ; 2] :
La fonction $\sqrt{\ }$ est définie sur $[0\,;+\infty[$. On cherche donc à déterminer pour quelles valeurs de x, $x(2-x)\geqslant 0$:
$x(2-x)$ est un trinôme ayant pour racines 0 et 2 ($x(2-x)=0$ ssi $x=0$ ou $2-x=0$ ssi $x=0$ ou $x=2$)
Sa forme développée est $2x-x^2$ donc on a le tableau de signes :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x(2-x)$	$-$	$+$	$-$	

$x(2-x)\geqslant 0$ pour $x\in[0\,;2]$ donc **f est définie sur [0;2].**

2. La fonction $\sqrt{\ }$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et la fonction $x\mapsto x(2-x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et positive sur [0 ; 2] donc, par composition $x\mapsto\sqrt{x(2-x)}$ est continue sur [0 ; 2].
   La fonction $x\mapsto x$ est continue sur [0 ; 2] donc, par produit, **f est continue sur [0;2]**.
3. Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I, $\sqrt{u}$ est dérivable sur I avec $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
   On ne peut pas appliquer cette formule si l'expression sous la racine est nulle car on ne peut pas diviser par 0. On ne peut donc appliquer cette formule pour dériver f que si $x(2-x)>0$.
   D'après le tableau de signes précédents, $x(2-x)>0$ sur $]0\,;2[$.
   La fonction $x\mapsto\sqrt{x(2-x)}$ est donc dérivable sur $]0\,;2[$. La fonction $x\mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc **la fonction f est dérivable sur]0;2[.**
   On a prouvé qu'on pouvait dériver f en utilisant la formule $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ sur l'intervalle]0;2[. Cette formule ne s'applique pas en 0 ou en 2 (sinon on divise par 0) mais cela ne veut pas dire que f n'est pas dérivable en 0 et en 2.
   Lorsque la formule s'applique, on est sûr que f est dérivable.
   Lorsque la formule ne s'applique pas, on ne peut pas conclure sur la dérivabilité de f. Il faut revenir à la définition du nombre dérivé.
4. **Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I. f est dérivable en a si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite réelle lorsque h tend vers 0. On a alors $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.**
   Etude de la dérivabilité en 0 : Soit h un réel strictement positif **(pour pouvoir calculer $f(0+h)$ car f n'est pas définie sur $]-\infty;0[$)**
   $$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h\sqrt{h(2-h)}-0}{h} \quad \textbf{car } f(0)=0$$
   $$=\sqrt{h(2-h)}$$
   $\lim\limits_{h\to 0}(2-h)=2$ donc $\lim\limits_{h\to 0}h(2-h)=0$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h(2-h)}=0$.
   On a donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$. Ainsi, **$f$ est dérivable en 0, avec $f'(0)=0$.**
   Etude de la dérivabilité en 2 : Soit h un réel **strictement négatif** **(pour pouvoir calculer $f(2+h)$ car f n'est pas définie sur $]2;+\infty[$).**
   Pour calculer $f(2+h)$, on remplace x par $2+h$ dans l'expression de $f(x)$.
   $$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)\sqrt{(2+h)(2-(2+h))}-0}{h} \quad \text{car } f(2)=0$$
   $$=(2+h)\frac{\sqrt{(2+h)(2-2-h)}}{h}=(2+h)\frac{\sqrt{-h(2+h)}}{h}$$
   On a une FI (0/0) donc il faut "se débarasser" d'un h au numérateur ou au dénominateur.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = (2+h)\frac{\sqrt{-h}\sqrt{2+h}}{h}$$

$h<0$ donc $h = -\left(\sqrt{-h}\sqrt{-h}\right)$. **En effet, $-h>0$. Par exemple, $-3=-\sqrt{3}\sqrt{3}=-\sqrt{-(-3)}\sqrt{-(-3)}$**

Ce calcul est difficile et peu important pour le bac

Ainsi, $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = (2+h)\frac{\sqrt{-h}\sqrt{2+h}}{-\sqrt{-h}\sqrt{-h}} = (2+h)\frac{-\sqrt{2+h}}{\sqrt{-h}}$

$\lim\limits_{h\to 0} 2+h = 2$

$\lim\limits_{h\to 0} -\sqrt{2+h} = -\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{h\to 0^-} \sqrt{-h} = 0^+$ donc $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{-\sqrt{2+h}}{\sqrt{-h}} = -\infty$

Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0} (2+h)\frac{-\sqrt{2+h}}{\sqrt{-h}} = -\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\infty$.

On n'obtient pas un nombre réel donc ***f* n'est pas dérivable en 2.**

5. **D'après ce qui précède, *f* est dérivable sur [0;2[et on peut appliquer les formules du cours sur]0;2[. On va donc chercher $f'(x)$ pour tout x de]0;2[en appliquant les formules**.

f est dérivable sur]0 ; 2[. **<u>Pour tout *x* de]0;2[</u>** :

On dérive *f* en appliquant la formule $(uv)'=u'v+uv'$ puis la formule $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

La suite est à faire pour mercredi prochain

On pose $u(x)=x$ $\qquad v(x)=\sqrt{x(2-x)}$

$u'(x)=1$ $\qquad U(x)=x(2-x)=2x-x^2$ et $U'(x)=2-2x$

donc $v'(x)=\frac{2-2x}{2\sqrt{x(2-x)}}=\frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}$

Ainsi, $f'(x)=1\sqrt{x(2-x)}+\frac{x(1-x)}{\sqrt{x(2-x)}}=\frac{\sqrt{x(2-x)}\sqrt{x(2-x)}+x-x^2}{\sqrt{x(2-x)}}=\frac{x(2-x)+x-x^2}{\sqrt{x(2-x)}}=\frac{-2x^2+3x}{\sqrt{x(2-x)}}$

$=\frac{x(-2x+3)}{\sqrt{x(2-x)}}$

On peut donc construire le tableau de variation :

x	0	3/2	2
$(-2x+3)$	+		–
$\sqrt{x(2-x)}$	+		+
signe de $f'(x)$	+		–
variations de f	0 ↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘ 2