EXERCICES DE BASE.
DIVISIBILITE (SANS LES CONGRUENCES)

1. Montrer que, quel que soit l'entier n, $3n+7$ n'est pas divisible par 3.
2. k est un entier naturel. $a=9k+2$ et $b=12k+1$. Soit n un diviseur de a et b. Déterminer les valeurs possibles pour n.

CORRECTION

1. Soit n un entier naturel.
Supposons que $3n+7$ soit divisible par 3.
$3n+7$ et $3n$ sont tous les deux divisibles par 3 donc $3n+7-3n=7$ est divisible par 3.
Or on sait que 7 n'est pas divisible par 3.
Ainsi **$3n+7$ n'est pas divisible par 3.**

2. Soit k un entier naturel et soit n un diviseur de $a=9k+2$ et de $b=12k+1$.
n divise a et b donc n divise $4a-3b=4(9k+2)-3(12k+1)=5$
Les diviseurs de 5 sont -5 ; -1 ; 1 et 5.
Les valeurs possibles pour n sont donc -5 ; -1 ; 1 et 5.
Attention : 5 et -5 ne conviennent pas forcément ; cela dépend de la valeur de k.

EXERCICES DE BASE.
DIVISION EUCLIDIENNE

1. La différence entre deux entiers naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers ?
2. Trouver les entiers naturels qui divisés par 4 donne un quotient égal au reste.
3. n désigne un entier naturel non nul. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2n^2+n$ par $n+1$.

CORRECTION

1. Soient a et b les deux entiers naturels cherchés, a étant le plus grand.
$$\begin{cases} a-b=538 \\ a=13b+34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=538+b \\ 538+b=13b+34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=580 \\ b=42 \end{cases}$$
Les entiers naturels cherchés sont 580 et 42.

2. Soit n un entier naturel qui, divisé par 4, donne un quotient égal au reste.
On a $n=4r+r$ avec r un entier tel que $0 \leqslant r < 4$ et donc $r \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.
Pour $r=0$: $n=0$. Le quotient de la division euclidienne de 0 par 4 est 0 et le reste est 0.
Pour $r=1$: $n=5$. Le quotient de la division euclidienne de 5 par 4 est 1 et le reste est 1.
Pour $r=2$: $n=10$. Le quotient de la division euclidienne de 10 par 4 est 2 et le reste est 2.
Pour $r=3$: $n=15$. Le quotient de la division euclidienne de 15 par 4 est 3 et le reste est 3.
Les entiers naturels qui divisés par 4 donne un quotient égal au reste sont 0 ; 5 ; 10 et 15.

3. Soit n un entier naturel non nul.
On a $2n^2+n=(n+1)(2n-1)+1$ avec $2n-1$ entier et $1<n+1$
On a donc écrit la division euclidienne de $a=2n^2+n$ par $b=n+1$: $a=bq+r$ avec $r=1<b$
Le reste de la division euclidienne de $2n^2+n$ par $n+1$ est 1.

EXERCICES DE BASE.
CONGRUENCES

1. Montrer que pour tout entier naturel n, 7^n+3^n+2 est divisible par 3.
2. Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que 2^n-1 soit divisible par 9 ?
3. Déterminer un entier compris entre -4 et 5 congru à n modulo 9 dans les cas suivants :
$n = 11$; $n = 24$; $n = 85$; $n = 62$; $n = -12$.

CORRECTION

1. Soit n un entier naturel.
$7\equiv 1(3)$ donc $7^n \equiv 1^n(3)$, c'est-à-dire $7^n \equiv 1(3)$.
D'autre par $3 \equiv 0(3)$ donc $3^n \equiv 0(3)$.
Ainsi $7^n+3^n+2 \equiv 1+0+2(3)$, c'est-à-dire $7^n+3^n+2 \equiv 3(3)$ ou encore $7^n+3^n+2 \equiv 0(3)$.
Alors, **7^n+3^n+2 est divisible par 3.**

2. Soit n un entier naturel.
2^n-1 est divisible par 9 si et seulement si $2^n-1 \equiv 0(9)$
si et seulement si $2^n \equiv 1(9)$

➢ *<u>On cherche la 1ère valeur non nulle de n telle que $2^n \equiv 1(9)$:</u>*
$2^0 = 1$ et $1 \equiv 1(9)$
$2^1 = 2$ et $2 \equiv 2(9)$
$2^2 = 4$ et $4 \equiv 4(9)$
$2^3 = 8$ et $8 \equiv 8(9)$
$2^4 = 16$ et $16 \equiv 7(9)$
$2^5 = 32$ et $32 \equiv 5(9)$
$2^6 = 64$ et $64 \equiv 1(9)$
Le plus petit entier naturel non nul n tel que $2^n \equiv 1(9)$ est 6.

➢ Soit $n = 6k+r$ avec k et r entiers et $r \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ la division euclidienne de n par 6.
$2^n = 2^{6k+r} = (2^6)^k \times 2^r$ et $2^6 \equiv 1(9)$ donc $2^n \equiv 1^k \times 2^r(9)$, c'est-à-dire $2^n \equiv 2^r(9)$.
On a donc $2^n \equiv 1(9)$ si et seulement si $2^r \equiv 1(9)$
si et seulement si $r = 0$ (d'après la 1ère étape puisque $r = 0$; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ou 5.

➢ **<u>Conclusion</u> : 2^n-1 est divisible par 9 si et seulement si le reste de la division euclidienne de n par 6 est 0, c'est-à-dire si et seulement si n est un multiple de 6.**

3.
Pour $n = 11$: **2** $\equiv 11(9)$ car $11 = 2 + 9$
Pour $n = 24$: $-$ **3** $\equiv 24(9)$ car $24 = 3 \times 9 - 3$
Pour $n = 85$: **4** $\equiv 85(9)$ car $85 = 9 \times 9 + 4$
Pour $n = 62$: $-$ **1** $\equiv 62(9)$ car $62 = 9 \times 7 - 1$
Pour $n = -12$: $-$ **3** $\equiv -12(9)$ car $-12 = -1 \times 9 - 3$

EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x+2 \equiv -1(7) \\ 100 \leqslant x < 125 \end{cases}$

CORRECTION

$\begin{cases} x+2 \equiv -1(7) \\ 100 \leqslant x < 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -3(7) \\ 100 \leqslant x < 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 4(7) \\ 100 \leqslant x < 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7k+4 \ \ avec \ \ k \ \ entier \\ 100 \leqslant x < 125 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7k+4 \ \ avec \ \ k \ \ entier \\ 100 \leqslant 7k+4 < 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7k+4 \ \ avec \ \ k \ \ entier \\ 13{,}7 \leqslant k < 17{,}2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7k+4 \ \ avec \ \ k \ \ entier \\ k \in \{14\,;\,15\,;\,16\,;\,17\} \end{cases}$

Pour $k = 14$: $x = 7 \times 14 + 4 = 102$; pour $k = 15$: $x = 7 \times 15 + 4 = 109$...

Ainsi $\boldsymbol{\begin{cases} x+2 \equiv -1(7) \\ 100 \leqslant x < 125 \end{cases}}$ **a pour solutions 102 ; 109 ; 116 ; 123**

EXERCICE

Montrer que pour tout entier naturel n, $3^{2n+2}+2^{6n+1} \equiv 0[11]$.

CORRECTION

Soit n un entier naturel. $3^{2n+2}+2^{6n+1} = 9^n\times 9+64^n\times 2$

$64 \equiv 9$ (11) donc $3^{2n+2}+2^{6n+1} \equiv 9^n\times 9+9^n\times 2$ (11)

$\equiv 9^n(9 + 2)$ (11)

$\equiv 9^n \times 11$ (11) Or $11 \equiv 0$ (11)

$\equiv$ 0(11)

EXERCICE

Déterminer le reste des divisions euclidiennes suivantes :

1. 7000001^{2999} par 7.

2. 7000002^{2999} par 7.

CORRECTION

1. $7\,000\,001 \equiv 1(7)$ donc $7000001^{2999} \equiv 1^{2999}(7)$, c'est-à-dire $8^{2999} \equiv 1(7)$.

Le reste de la division euclidienne de 8^{3000} par 7 est 1.

2. $7\,000\,002 \equiv 2(7)$ donc $7000002^{2999} \equiv 2^{2999}(7)$.

On cherche les restes successifs des divisions euclidiennes des puissances de 2 par 7 :

$2^0 = 1 \equiv 1(7)$

$2^1 = 2 \equiv 2(7)$

$2^2 = 4 \equiv 4(7)$

$2^3 = 8 \equiv 1(7)$

$2^4 = 16 \equiv 2(7)$ ...

La suite des restes est périodique de période 3.

$2999 = 3 \times 999 + 2$ donc $2^{2999} = \left(2^3\right)^{999} \times 2^2$

$$\begin{aligned} 7000002^{2999} &\equiv 2^{2999}(7) \\ &\equiv 1^{999} \times 4(7) \\ &\equiv 4(7) \end{aligned}$$

Le reste de la division euclidienne de 7000002^{2999} par 7 est 4.

EXERCICE

Etude de l'équation $a^2 + 9 = 2^k$ d'inconnue a où $a \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 0$.

1. Justifier que si a et k existent, alors $k \geqslant 4$.
2. Montrer par l'absurde que si a existe, alors a est impair.
3. Compléter le tableau suivant modulo 4 :

a ≡	0	1	2	3
a^2 ≡				

4. En utilisant les questions précédentes, montrer que l'équation n'a pas de solution.

CORRECTION

1. Supposons que a et k existent.
   On a alors $a^2 = 2^k - 9$ et un carré est positif donc $2^k \geqslant 9$.
   $2^0 = 1$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$ donc **$k \geqslant 4$.**
2. Supposons que a soit pair.
   Alors a = 2k, avec k entier naturel.
   $a^2 + 9 = 4k^2 + 9 = 2(2k^2 + 4) + 1$ est impair.
   Or $a^2 + 9 = 2^k$ et 2^k est pair.
   On arrive à une contradiction ($a^2 + 9$ est à la fois impair et pair).
   Alors **a est impair**.
3.

a ≡	0	1	2	3
a^2 ≡	**0**	**1**	**0**	**1**

4. Supposons que l'équation ait une solution :
   Il existe alors a et k entiers naturels tels que $a^2 + 9 = 2^k$.
   D'après la question 2, a est impair donc $a \equiv 1\ (4)$ ou $a \equiv 3(4)$.
   D'après la question 2, on a alors $a^2 \equiv 1(4)$
   Ainsi $a^2 + 9 \equiv 1 + 9\ (4)$, c'est-à-dire **$a^2 + 9 \equiv 2(4)$.**
   D'autre part $2^k = 4 \times 2^{k-2}$ (puisque $k \geqslant 4$, $k - 2 > 0$) donc **$2^k \equiv 0(4)$**
   On ne peut donc pas avoir $a^2 + 9 = 2^k$.
   L'équation n'a donc pas de solution.

EXERCICE

1. En utilisant uniquement la propriété et la définition suivantes :

Propriété* : *Soit c un entier naturel non nu et a et b deux entiers relatifs. a ≡ b(c) si et seulement si c divise b − a.

Définition* : *a et b sont deux entiers non nuls. a divise b ssi il existe un entier k tel que b = ka.

montrer que si a ≡ b (c) et si a' ≡ b'(c), alors a + a' ≡ b + b' (c)

2. x et y sont des entiers relatifs. On note (S) le système $3x + y \equiv 1\ (6)$
$x - y \equiv 3\ (6)$

a. Montrer que 4x ≡ 4 (6)

b. Déduisez en à l'aide d'un tableau modulo 6, que x ≡ 1 (6) ou x ≡ 4 (6).

c. En utilisant la deuxième équation, en déduire les couples solutions du système.

CORRECTION

1. Soient a, b, a', b' et c des entiers relatifs tels que a ≡ b (c) et a' ≡ b'(c).
D'après la propriété : c divise b − a et c divise b' − a'.
D'après la définition, il existe donc des entiers k et k' tels que b − a = kc et b' − a' = k'c.
Alors (b + b') − (a + a') = b − a + b' − a' = kc + k'c = (k + k')c avec k + k' entier.
Donc c divise (b + b') − (a + a')
D'après la propriété, on peut donc dire que **a + a' ≡ b + b' (c)**

2.

d. On ajoute les deux équations du système et on obtient : **4x ≡ 4 (6).**

e. On complète le tableau ci-dessous, modulo 6 :

x ≡	0	1	2	3	4	5
4x ≡	0	4	2	0	4	2

On sait que 4x ≡ 4 (6) donc, d'après le tableau, **x ≡ 1 (6) ou x ≡ 4 (6).**

f. x − y ≡ 3(6) ⇔ y ≡ x − 3(6)
On sait que x ≡ 1 (6) ou x ≡ 4 (6
Si x ≡1(6), y ≡ − 2(6) c'est-à-dire y ≡ 4(6)
Si x ≡ 4(6), y ≡ 1(6).
Si (x ; y) est solution du système, alors x ≡ 1 (6) et y ≡ 4(6) OU x ≡ 4 (6) et y ≡ 1(6).

Réciproquement :
Si x ≡ 1 (6) et y ≡ 4(6) : 3x + y ≡ 7(6), c'est-à-dire 3x + y ≡ 1(6) et x − y ≡ − 3(6), c'est-à-dire x − y ≡ 3(6). Le couple (x ; y) est donc solution du système.
Si x ≡ 4 (6) et y ≡ 1(6) : 3x + y ≡ 13(6), c'est-à-dire 3x + y ≡ 1(6) et x − y ≡ 3(6). Le couple (x ; y) est donc solution du système.

Conclusion :
Les solutions du système sont les couples de la forme (6k + 1 ; 6k' + 4) avec k et k' entiers et les couples de la forme (6k + 4 ; 6k' + 1) avec k et k' entiers.
On écrit S = {(6k + 1 ; 6k' + 4) ; (6k + 4 ; 6k' + 1) ; k, k' ϵ ℤ}.

EXERCICE : SUITE ET CONGRUENCES

On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer les 6 premiers termes de la suite. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n(4)$. En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2(4)$ et $u_{2k+1} \equiv 0(4)$.

3. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28(100)$.

4. Démontrer la conjecture émise à la question a.

CORRECTION

1. $u_0 = 14$; $u_1 = 64$; $u_2 = 314$; $u_3 = 1564$; $u_4 = 7814$; $u_5 = 39\,064$

Il semble que les deux derniers chiffres de u_n soient 14 si n est pair et 64 si n est impair.

2. Soit *n* un entier naturel.

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$. Or $25 \equiv 1(4)$ et $36 \equiv 0(4)$.

Alors **$u_{n+2} \equiv u_n(4)$: relation (1)**

Par récurrence sur *k* :

<u>*Initialisation*</u> : Pour $k = 0$: $u_{2\times 0} = u_0 = 14 \equiv 2(4)$ et $u_{2\times 0+1} = u_1 = 64 \equiv 0(4)$

<u>*Hérédité*</u> : Soit *k* un entier naturel tel que $u_{2k} \equiv 2(4)$ et $u_{2k+1} \equiv 0(4)$.

$u_{2(k+1)} = u_{2k+2} \equiv u_{2k}$ d'après la relation (1) et $u_{2k} \equiv 2(4)$ donc $u_{2(k+1)} \equiv 2(4)$

$u_{2(k+1)+1} = u_{2k+3} \equiv u_{2k+1}$ d'après la relation (1) et $u_{2k+1} \equiv 0(4)$ donc $u_{2(k+1)+1} \equiv 0(4)$

<u>*Conclusion*</u> : **pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2(4)$ et $u_{2k+1} \equiv 0(4)$**

3. <u>*Initialisation*</u> : Pour n = 0 : $2u_0 = 2 \times 14 = 28 \equiv 28(100)$.

<u>*Hérédité*</u> : Soit n un entier naturel tel que $2u_n \equiv 28(100)$.

$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 10u_n - 12$

$2u_{n+1} \equiv 5 \times 28 - 12\ (100)$

$2u_{n+1} \equiv 128\ (100)$

$2u_{n+1} \equiv 28\ (100)$

<u>*Conclusion*</u> : **pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28(100)$.**

4. Soit *n* un entier.

D'après la question 3, $2u_n = 100k + 28$ avec *k* entier.

Alors **$u_n = 50k + 14$, avec *k* entier.**

Alors $u_n \equiv 2k + 2\ (4)$

Si *n* est pair :

D'après la question 2, $u_n \equiv 2(4)$ et $u_n \equiv 2k + 2\ (4)$ donc $2k \equiv 0(4)$: $2k = 4k'$ avec k' entier.

Ainsi $u_n = 50\,k + 14 = 100k' + 14$ et **u_n se termine par 14.**

Si *n* est impair :

D'après la question 2, $u_n \equiv 0(4)$ et $u_n \equiv 2k + 2\ (4)$ donc $2k \equiv -2(4)$ c'est-à-dire $2k \equiv 2(4)$: $2k = 4k' + 2$avec k' entier.

Ainsi $u_n = 50\,k + 14 = 100k' + 64$ et **u_n se termine par 64**.